.

DL 9 Bis : 04–05 Espaces vectoriels euclidiens

Source : Epreuve spécifique, option scientifique, session 2004.

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n.
Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E, on définit un polynôme $\phi(P)$ par :
$$[\phi(P)](X) = (X^2 - 1)\, P''(X) + 2XP'(X).$$

1) Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :
$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = \phi(P)$$

3) Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.

a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3.

b) Justifier que φ_3 est diagonalisable.

c) Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3, formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.

4) On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.

a) Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.

b) En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1) Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.

2) Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.

4) En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n.

5) Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, X^n}\left[(X^2-1)^n\right].$$

6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

8) On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.

a) Vérifier que :

$$(X^2-1)\, U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}\, x.$$

1) Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2) a) Montrer que

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)\ \mathrm{d}\, x.$$

b) Que peut-on dire déduire pour les endomorphismes φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ?

c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie **B**, que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

3) Soit n un entier naturel.

a) Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in [|0,n|], \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\, x^k}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}\, x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]\ \mathrm{d}\, x.$$

b) En déduire que, poour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1}.

c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

4) a) À l'aide de **C.3)a)**, exprimer, pour tout entier naturel n, $\|L_n\|^2$ en fonction de
$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, \mathrm{d}\, x.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

d) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

5) Donner, pour tout entier naturel n, une base orthonormée de E_n.

Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1) Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$.

2) En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que
$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X).$$

3) Montrer que $\forall k \in [|0,n|]\,, \alpha_k = -(2n+1)\dfrac{\langle XL_n, L_k\rangle}{\|L_k\|^2}$.

4) Pour tout $k \in [|0, n-2|]$, vérifier que $\langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.

5) Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.

6) En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1}.

7) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$.

Partie E : Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1+|t|}{2}\right)^n \binom{2n}{n} x^n$.

2) En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est strictement positif.
On donnera une minoration de R_t, mais on ne cherchera pas à le calculer.

On note S_t la somme de cette série entière : $\forall x \in \left]-R_t, R_t\right[\,, S_t(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$

3) En utilisant le résultat de **D.7)**, montrer que S_t est solution sur $\left]-R_t, R_t\right[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :
$$(\mathscr{E}_t)\ (1-2tx+x^2)y'(x) + (x-t)y(x) = 0$$

4) Pour $|t| < 1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x.

Partie F : Projection orthogonale, calcul de distance

1) Calculer, pour tout entier naturel k, l'intégrale
$$J_k = \int_{-1}^{1} x^k \, \mathrm{d}\, x.$$

2) Étant donnés deux entiers naturels n et r, tels que $0 \leqslant r \leqslant n$, on note p_r la projection orthogonale de E_n sur son sous-espace vectoriel E_r.

Donner une expression générale de $p_r(P)$ utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme P de E_n.

3) On suppose désormais $n = 3$ et $P = X^3$.

a) Déterminer $p_0(P)$, $p_1(P)$ et $p_2(P)$.

b) Calculer les distances $d(P, E_k)$ de P aux sous-espaces vectoriels E_k pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2$.

4) On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.

Montrer l'existence de
$$m = \min_{Q \in G} \int_{-1}^{1} (Q(x))^2 \, \mathrm{d}\, x$$
et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.

Fin de l'énoncé
Bonnes vacances