

DS 9 : 04–05 Programme de L'année

Durée : 4 heures

Source : Ecole supérieure de Commerce de Lyon, Option scientifique, Session 1998.

Partie I : Etude d'un produit scalaire.

1. .

(a) Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E , l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$ est convergente.

(b) Pour tout entier naturel k , on note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

(0.5 pts) Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E_n^2 à valeurs dans \mathbb{R} définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

2. (a) (0.5 pts) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_n .

(b) (0.5 pts) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n , calculer $\langle X^i, X^j \rangle$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3. (a) (1 pt) Construire une famille orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2) de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0, 1, 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).

On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

(b) (0.75 pts) Montrer pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \langle Q_2, Q_2 \rangle + (u+4)^2 \langle Q_1, Q_1 \rangle + (u+v+2)^2 \langle Q_0, Q_0 \rangle$$

- (c) Soit H la fonction définie sur \mathbb{R}^2 qui à tout couple (u, v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt.$$

(1 pt) Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

Partie II : Construction d'une base orthogonale.

Soit θ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \theta(P) = XP''(X) + (1 - X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\theta(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\theta(P)(t) = tP''(t) + (1 - t)P'(t).$$

1. (1.5 pts) Montrer que θ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à θ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E_n .
2. (a) (1.5 pts) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(\theta(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k}$ est liée. En déduire que $-k$ est valeur propre de θ .
(b) (0.75 pts) Montrer que θ est diagonalisable.
(c) (1.5 pts) Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1. En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \dots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\theta(P_k) = -kP_k$. Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \dots, n\}$, le degré de P_k .
(d) (0.5 pts) Vérifier que $P_0 = Q_0, P_1 = Q_1, P_2 = Q_2$.
3. (a) (0.75 pts) À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad \langle \theta(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt.$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $t \mapsto tP'(t)e^{-t}$ avec la fonction $t \mapsto \theta(P)(t)e^{-t}$.

- (b) (0.5 pts) En déduire que θ est un endomorphisme symétrique de E_n , i.e : $\langle \theta(P), Q \rangle = \langle P, \theta(Q) \rangle$.
- (c) (0.75 pts) En déduire que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthogonale de E_n .

Partie III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2 + \sqrt{2}$ et $b = 2 - \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1. (a) (1 pt) Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.
(b) (0.5 pts) Vérifier : $\int_0^{+\infty} P_2(t)e^{-t} dt = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

(c) (1.5 pts) Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R , chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = P_2Q + R$.

Montrer : $\langle P_2, Q \rangle = 0$.

En déduire : $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

Dans la suite du problème, on considère une fonction f quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0, +\infty[, |f^{(4)}(t)| \leq M$.

2. (a) (1 pt) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |f(t)| \leq T(t).$$

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt$ converge.

(b) (1 pt) Soit D l'application de E_3 dans \mathbb{R}^4 définie par :

$$\forall P \in E_3, D(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b)).$$

Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) (0.75 pts) En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S(b) = f(b), S'(b) = f'(b).$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b .

On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(t))^2.$$

4. (a) Vérifier que g s'annule en a, b et x_0 .

(b) (1.5 pts) En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.

(On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

En déduire : $f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c)$,

puis : $|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M$.

5. (a) (0.5 pts) Etablir :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M.$$

(b) (1 pt) En déduire : $\left| \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \frac{M}{6}$.

6. (1.5 pts) Application : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \frac{1}{10+t}$.

En admettant que $0,0915 \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \leq 0,0916$, donner une valeur décimale approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt$. On en indiquera la précision.

Fin de l'énoncé.

Fin de l'année