.
PCSI 2
Mr Mamouni
CPGE Med V- Casablanca

DS 9 : 04–05 Programme de L'année

Corrigé

Partie I : Etude d'un produit scalaire.

1. .
   (a) $P(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,1]$, de plus $P(t)e^{-t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $P(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   (b) Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$.
   (0.5 pts) Dans I_{k+1} on effectue une intégration par partie, en posant $u' = e^{-t}, v = t^{k+1}$ on obtient $I_{k+1} = \int_t^{k+1} e^{-t}dt = [-e^{-t}t^{k+1}]_0^{+\infty} + (k+1)\int_t^k e^{-t}dt = (k+1)I_k$ car $\lim_{+\infty} e^{-t}t^{k+1} = 0$.
   Ainsi on a les realtion suivantes : $I_k = kI_{k-1}, I_{k-1} = (k-1)I_{k-2}, \dots, I_1 = I_0 = 1$, d'où $I_k = k!$.

2. (a) Montrer que :
   Symetrie : $< P, Q >=< Q, P >$.
   Bilénarité : $< P + \lambda P', Q >=< P, Q > +\lambda < P', Q >$.
   Positive : $< P, P >\geq 0$.
   Définie $< P, P >= 0 \implies P = 0$.

   (b) $< X^i, X^j >= I_{i+j} = (i+j)!$.

3. (a) La famille orthogonale est $(Q_0 = 1, Q_1 = X - 1, Q_2 = X^2 - 4X + 2)$ obtenue en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour la base $(1, X, X^2)$.

   (b) Il suffit de remarquer que pour tout couple (u, v) de réels on ca : $t^2 + ut + v = Q_2 + (u+4)^2Q_1 + (u+v+2)^2Q_0$, donc $\int_0^{+\infty}(t^2+ut+v)^2e^{-t}\, dt =< t^2+ut+v, t^2+ut+v >=< Q_2+(u+4)^2Q_1+(u+v+2)^2Q_0, Q_2+(u+4)^2Q_1+(u+v+2)^2Q_0 >=< Q_2, Q_2 > +(u+4)^2 < Q_1, Q_1 > +(u+v+2)^2 < Q_0, Q_0 >$ car la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est orthogonale.

(c) $H(u,v) = \int_0^{+\infty}(t^2+ut+v)^2e^{-t}\,dt =< Q_2,Q_2 > +(u+4)^2 < Q_1,Q_1 > +(u+v+2)^2 < Q_0,Q_0 >$ est minimal lorsque $u+4=0, u+v+2=0$, c'est à dire $u=-4, v=-u-2=2$, ce minimum est exactement $Q_2,Q_2 >=< X^2-4X+2, X^2-4X+2 >=< X^2,X^2 > -8 < X^2,X > +4 < X^2,1 > +16 < X,X > -16 < X,1 > +4 < 1,1 >= 4$, en utilisant la relation $< X^i,X^j >= I_{i+j} = (i+j)!$.

Partie II : Construction d'une base orthogonale.

1. Pour montrer que θ est un endomorphisme de E_n il faut montrer qu'il est linéaire, $\theta(P+\lambda Q) = \theta(P)+\lambda\theta(Q)$ et que $\deg(P)\leq n \implies \deg\theta(P)\leq n$, ce qui n'est pas du tout difficile à faire.
   D'autre part $\theta(X^k) = k(k-1)X^{k-1}+k(1-X)X^{k-1} = k^2X^{k-1}-kX^k$ la matrice associée à θ relativement à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ de E_n sera donc bidiagonale supérieure de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -n+1 & n^2 \\ 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$

2. (a) Soit $k\in\{0,\dots,n\}$. La famille $(\theta(X^j)+kX^j)_{0\leq j\leq k} = (\theta(j^2X^{j-1}))_{0\leq j\leq k} = (0,1,4X,\dots,n^2X^{n-1}$ est liée car contient un élément nul, ainsi $\theta+kid$ n'est pas injective car transforme la base $(X^j)_{0\leq j\leq k}$ en une famille liée donc $-k$ est une valeur propre de θ.

   (b) θ est diagonalisable car admet $n+1$ valeur propres distinctes $0,1,\dots,n$ sur E_n qui est de dimension $n+1$.

   (c) Notons F_k le sous espace associé de θ associé à la valeur propre $-k$, comme θ est diagonalisable on a : $\dim F_0+\dim F_n+\dots+\dim F_n = \dim E_n = n+1$, ansi on a $n+1$ sous espaces de dimensions non nulles et dont la somme des dimension est égale à $n+1$ donc chacun de ces sous espaces est de dimension 1, et alors les éléments de F_k sont tous proportionnels, donc dans chaque F_k on ne peut trouver qu'un seul polynôme unitaire, autrement dit : Pour tout k appartenant à $\{0,\dots,n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\theta(P_k) = -kP_k$.

   Posons $\deg P_k = m$, donc $P_k = X^m+\dots+a_0$ car unitaire or $\theta(P_k) = XP``_k+(1-X)P'_k = -kP_k$, d'où $-mX^m+\dots = -kX^m+\dots$, on s'intéresse à la puissance dominante, d'où $m=k$, ainsi $\deg P_k = k$.

   (d) Vérifier que $\theta(Q_k) = -kQ_k$ pour $k=0,1,2$, or chaque Q_k est unitaire, l'unicité dans la question précédente implique que $P_k = Q_k$.

3. (a) On a : $(tP'(t)e^{-t})' = (P'(t)+tP``(t)-tP'(t))e^{-t} = \theta(P)(t)e^{-t}$, donc $< \theta(P),Q >= \int_0^{+\infty}\theta(P)(t)Q(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}(tP'(t)e^{-t})'Q(t)\,dt = [tP'(t)e^{-t}Q(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt$ le crochet est nul en $+\infty$ car les puissances sont négligeables devant e^{-t} en $+\infty$.

   (b) D'aprés la question précédente on $< \theta(P),Q >= -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt$, mais aussi $< \theta(Q),P >= -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt$, d'où $< \theta(P),Q >=< P,\theta(Q) >$.

(c) Soit $q \neq k$ alors $< \theta(P_k), P_q >=< P_k, \theta(P_q) \implies -k < P_k, P_q >= -q < P_k, P_q > \implies (k-q) < P_k, P_q >= 0 \implies < P_k, P_q >= 0 \implies$ la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E_n, donc libre puisque ne contient pas d'élément nul, et comme elle est de cardinal $n+1$ et que $\dim E_n = n+1$ alors c'est une base orthogonale.

Partie III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

1. (a) Par linéarité de l'intégrale il suffit que la relation soit vrai pour les polynômes $1, X$ d'où le systéme $\begin{array}{ll} \alpha+\beta & = 1 \\ a\alpha + b\beta & = 1 \end{array}$ ce qui donne $\alpha = \frac{1-b}{a-b}, \beta = \frac{1-a}{b-a}$.

   (b) Vérifier : $\int_0^{+\infty} P_2(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}(t^2-4t+2)e^{-t}\,dt = 0$ et $\alpha P_2(a) + \beta P_2(b) = 0$ car a et b sont des racines de P_2.

   (c) L'existence des deux fonctions polynômes Q et R, chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = P_2Q + R$. est assurée par le théorème de la division euclidienne

   On a : (P_0, P_1) est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, et P_2 orthogonal à P_0 et P_1 donc orthogonal à tout polynôme de degré inférier à 1, d'où $< P_2, Q >= 0$.

   En déduire : $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt =< P, 1 >=< P_2Q + R, 1 >=< P_2Q, 1 > + < R, 1 >=< P_2, Q > + < R, 1 >=< R, 1 >= \int_0^{+\infty} R(t)e^{-t}\,dt = \alpha R(a) + \beta R(b) = \alpha R(a) + \beta R(b)$, car a et b sont des racines de P_2.

2. (a) L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4, s'écrit $|f(t) - f(0) + tf'(0) + t^2\frac{f''(0)}{2} + t^3\frac{f'''(0)}{3!}| \leq t^2\frac{M}{4!}$, d'où l'existence d'une fonction polynôme $T(X) = |f(0)| + X|f'(0)| + X^2\frac{|f''(0)|}{2} + X^3\frac{|f'''(0)|}{3!}| + X^2\frac{M}{4!}$ de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

   $$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq |f(t)| \leq T(t).$$

   Noter qu'on a utilisé pour y arriver à ce résultat l'inégalité $|x| - |y| \leq |x-y|$ En en déduit alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt$ converge puisque $|f(t)|e^{-t} \leq T(t)e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   (b) Il est clair que D est linéaire, d'autre part $P \in$ker$(D) \implies a$ et b sont racines doubles de D, i.e : $(X-a)^2(X-b)^2$ divise D, or $\deg(P) \leq 3$ d'où $P = 0$, ainsi D est injective de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}^4$ qui sont de même dimension, d'où bijective.

   (c) On a $D : E_3 \implies \mathbb{R}^4$ bijective et $(f(a), f'(a), f(b), f'(b) \in \mathbb{R}^4$, d'où l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que : $D(S) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b)$, autrement dit : $S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S(b) = f(b), S'(b) = f'(b)$.

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b.

   On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

   $$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2}\left(P_2(t)\right)^2.$$

4. (a) Simple vérification.

   (b) Si $a < x_0 < b$, en utilisant le théorème de Rolle sur $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ on en déduit l'éxistence de $c_1 \in]a, x_0[$ et $c_2 \in]x_0, b[$ tels que : $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$, or

$g'(a) = g'(b) = 0$, (vérifier le), en utilisant cette fois le même théorème mais cette fois pour g' sur les intervalles $[a, c_1], [c_1, c_2]$ et $[c_2, b]$ on en déduit l'existence de $d_1 \in]a, c_1[, d_2 \in]c_1, c_2[, d_3 \in]c_2, a[$ tels que $g``(d_1) = g''(d_2) = g``(d_3) = 0$, le théorème de Rolle aplliqué à $g``$ sur les intervalles $[d_1, d_2], [d_2, d_3]$ permet d'affirmer l'existence de $e_1 \in [d_1, d_2], e_2 \in [d_2, d_3]$ tels que $g^{(3)}(e_1) = g^{(3)}(e_2) = 0$ et enfin le théorème de Rolle pour $g^{(3)}$ sur $[e_1, e_2]$ permet de conclure qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.
On a : $g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \frac{f(x_0)-S(x_0)}{(P_2(x_0))^2}4!$ car $\deg S = 3, \deg P_2^2 = 4$, or $g^{(4)}(c) = 0$, d'où $f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!}f^{(4)}(c)$ et donc $|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!}M$, car $|f^{(4)}| \leq 4!$.

5. (a) D'apres la question précédente est vrai pour tout réel $x \geq 0$ différent de a et b, or il est clair qu'elle est vrai pour a et b, d'où

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad |f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!}M.$$

(b) $\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,dx - \alpha f(a) - \beta f(b)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,dx - \alpha S(a) - \beta S(b)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,dx -\right.$ $\int_0^{+\infty} |f(x) - S(x)e^{-x}|\,dx \leq \int_0^{+\infty} M\frac{(P_2(x))^2}{4!}e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} M\frac{\left(x^2-4x+2\right)^2}{4!}e^{-x}\,dx = \frac{M}{6}$.

6. Application : $f(t) = \frac{1}{10+t}$, donc $f^{(4)}(t) = \frac{4!}{(10+t)^5} \leq 4!10^{-5} = M$, d'autre part $\frac{2-\sqrt{2}}{4}f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4}f(2-\sqrt{2}) - \frac{M}{6} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\,dt \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4}f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4}f(2-\sqrt{2}) + \frac{M}{6}$, d'où $0,0915 - 0,00004 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\,dt \leq 0,0916 + 0,00004$, et donc $0,09146 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\,dt \leq 0,09164$, ainsi 0,0916 est une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\,dt.$ avec une précision de 10^{-4} prés.

Fin du corrigé.
Bonne vacances