DS 9 : *Algébre linéaire et euclidienne.*

Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 17 Juin 2006

Durée: 4 heures.

PREMIER PROBLÉME

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes de $(T_n)_{in\mathbb{N}^*}$

1) $T_2(X) = 4X^2 - 1, T_3(X) = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X$.

2) a) Il suffit de raisonner par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'aprés la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on peut affirmer que T_n est un polynôme de degré n, dont le coéfficient dominant vérifie la relation : $co(T_n) = 2co(T_{n-1})$, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 2, d'où $co(T_n) = 2^n co(T_0) = 2^n$.

b) Il s'agit encore d'une récurrence forte, vu que T_n dépond de $n - 1$ et $n - 2$.
Pour $n = 0, 1, 2, 3$ le résultat est vrai.
Supposons maintenant le résultat vrai pour $n - 1$ et $n - 2$.
Si n est pair, alors $n - 1$ impair et $n - 2$ pair, donc T_{n-1} impair et T_{n-2} pair, d'où XT_{n-1} et T_{n-2} sont pair et par suite $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ est aussi pair.
Même raisonnement pour le cas n impair.

3) On montre par récurrence forte, toujours, que $T_n(1) = n + 1$.

4) a) On raisonne encore par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'aprés la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)\\
&= 2\cos\theta\frac{\cos n\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos(n-1)\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{2\cos\theta\cos n\theta - \cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

b) D'aprés la question précédente :

$$\begin{aligned}
T_n(\cos\theta) = 0 &\iff \sin(n+1)\theta = 0\\
&\iff (n+1)\theta = k\pi\\
&\iff \theta = \frac{k\pi}{n+1}
\end{aligned}$$

En prenant $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ avec $1 \leq k \leq n$, on obtient n racines de T_n deux à deux distinctes toutes dans $]-1,1[$, or $\deg(T_n) = n$, donc ce sont exactement les racines de T_n.

c) On rappelle que la décomposition d'un polynôme de degré n, de coéfficient dominant, λ et dont les racines sont x_k tel que $1 \leq k \leq n$ s'écrit $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$, or T_n est un polynôme de degré n, de coéfficient dominant, 2^n et dont les racines sont $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ tel que $1 \leq k \leq n$, donc sa décomposition s'écrit $T_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$

d) En remplaçant X par 1, dans la formule : $T_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$, on obtient $n+1 = 2^n \prod_{k=1}^{n} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ car $1-\cos(a) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$, d'où $n+1 = 2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ et par suite $\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$.

5) a) Simple calcul de dérivation, en utilisant la relation : $(P(cos\theta))' = -\sin\theta P'(\cos\theta)$.

b) En prenant $X = \cos\theta$ dans la question précédente, on obtient : $(X^2-1)T_n``(X) + 3XT_n'(X) - (n^2+n)T_n(X) = 0$ pour $X \in [-1,1]$, donc pour tout X, car un polynôme qui admet une infinité de racines est partout nul.

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L.

1) Il est clair que $L(P+\lambda Q) = L(P) + \lambda L(Q)$, d'autre part si P est un polynôme de degré inférieur à n, c'est aussi vrai pour $L(P)$, donc L est un endomorphisme de E.

2) a) D'aprés la question 5.b de la partie I, on a : $L(T_k) = (k^2+2k)T_k$

b) Ainsi $\lambda_k = k^2+2k$ tel que $0 \leq k \leq n$ sont les valeurs propres de L, dont le sous-espace propre associé est engendré par T_k et donc de dimension 1.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire.

1) Symétrie : $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)dx = \varphi(Q,P)$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned}\varphi(P_1+\lambda P_2, Q) &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(P_1(x)+\lambda P_2)Q(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P_1(x)Q(x)dx + \lambda\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P_2Q(x)dx \\ &= \varphi(P_1,Q)+\lambda\varphi(P_1,Q)\end{aligned}$$

D'où φ est linéaire à gauche, comme elle est symétrique, alors elle est aussi biléaire à droite.

Positive : $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)^2dx \geq 0$

Définie :

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Longrightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)^2dx = 0 \\ &\Longrightarrow P^2 = 0 \text{ sur } [-1,1] \text{ car } P^2 \text{ continue, positive} \\ &\Longrightarrow P = 0 \text{ sur } [-1,1] \\ &\Longrightarrow P = 0 \text{ car c'est un polynôme}\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\varphi(L(P),Q) &= \int_{-1}^{1}\left(3x\sqrt{1-x^2}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P``(x)\right)Q(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right)'Q(x)dx \\ &= \left[\left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right)Q(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que : $\varphi(P,L(Q)) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx$, d'où l'égalité.

3) Soit $k \neq p$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(L(T_k),T_p) = \varphi(L(T_k),T_p) &\Longrightarrow (k^2+2k)\varphi(T_k,T_p) = (p^2+2p)\varphi(T_k,T_p) \\ &\Longrightarrow (k^2+2k-p^2-2p)\varphi(T_k,T_p) = 0 \\ &\Longrightarrow (k-p)(k+p+2)\varphi(T_k,T_p) = 0 \\ &\Longrightarrow \varphi(T_k,T_p) = 0\end{aligned}$$

Et donc la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale.

SECOND PROBLÉME.

1) a) Soit P et Q deux polynômes et, λ un nombre réel. $\Phi(P+\lambda Q)(x) = (x^2-1)(P+\lambda Q)''(x)+2x(P+\lambda Q)'(x) = (x^2-1)P''(x)+2xP'(x)+\lambda((x^2-1)P''(x)+2xP'(x)) = \Phi(P)(x)+\lambda\Phi(Q)(x)$, d'où Φ est linéaire.

b) Soit P un polynôme de degré inférieur à n, on a : $\deg((x^2-1)P''(x)) = \deg(P)$ et $\deg(2xP'(x)) = \deg(P)$, d'où $\deg(\Phi(P)) = \deg(P) \leq n$, et donc $\Phi(E_n) \subset E_n$, ce qui veut dire que E_n est un sev stable par Φ.

2) a) $\Phi(\varepsilon_0) = 0, \Phi(\varepsilon_0) = 2\varepsilon_1, \Phi(\varepsilon_0) = -k(k-1)\varepsilon_{k-2}+k(k+1)\varepsilon_k,$

b) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) A_3 est une matrice triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : 0,1 et 6.

d) Oui, elle est diagonalisable, car admet 3 valeurs propres distinctes.

3) a) $U_n(x) = (x^2-1)^n$, donc $U_n'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1}$, d'où $(x^2-1)U_n'(x) = 2nx(x^2-1)^n = 2nxU_n(x)$.

b) On dérive $n+1$ l'égalité précédente, et on utilise la formule de Leibniz, donc :

$$\begin{aligned}
&((x^2-1)U_n'(x))^{(n+1)} = (2nxU_n(x)^{(n+1)} \\
\Longrightarrow\ & \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_{n+1}^k (x^2-1)^{(k)}(U_n'(x))^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_{n+1}^k (2nx)^{(k)}(U_n(x))^{(n+1-k)} \\
\Longrightarrow\ & \mathcal{C}_{n+1}^0(x^2-1)^{(0)}(U_n'(x))^{(n+1)} + \mathcal{C}_{n+1}^1(x^2-1)^{(1)}(U_n'(x))^{(n)} \\
& +\mathcal{C}_{n+1}^2(x^2-1)^{(2)}(U_n'(x))^{(n-1)} \\
& = \mathcal{C}_{n+1}^0(2nx)^{(0)}(U_n(x))^{(n+1)} + \mathcal{C}_{n+1}^1(2nx)^{(1)}(U_n(x))^{(n)} \\
\Longrightarrow\ & (x^2-1)U_n^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xU_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)U_n^{(n)}(x) \\
& = 2nxU_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(x) \\
\Longrightarrow\ & (x^2-1)U_n^{(n+2)}(x) + 2xU_n^{(n+1)}(x) = n(n+1)U_n^{(n)}(x) \\
\Longrightarrow\ & (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) = n(n+1)P_n(x) \\
\Longrightarrow\ & \Phi(P_n) = n(n+1)P_n
\end{aligned}$$

c) $(P_0,\ldots,P_n)$ est une famille de cardinal $n+1 = \dim(E_n)$, pour montrer que c'est une base il suffit de montrer qu'elle est libre, pour cela on va raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, la famille $\{P_0\}$ est libre car $P_0 \neq 0$.
Supposons le resultat vrai pour $n-1$ et montrons que c'est vrai pour n.
Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ tel que $\lambda_0P_0+\ldots+\lambda_nP_n = 0 \quad (1)$, appliquons Φ à cette égalite tenant du fait que : $\Phi(P_k) = k(k+1)P_k$, on obtient : $2\lambda_1P_1+\ldots+n(n+1)\lambda_nP_n = 0 \quad (2)$, faisons maintenant : $(2)-n(n+1)\times(1)$, on obtient :
$(2-n(n+1))\lambda_1P_1+\ldots+((n-1)n-n(n+1))\lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$, or la famille $(P_1,\ldots,P_{n-1})$ par hypothèse de récurrence, donc
$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, et (2) devient $n(n+1)\lambda_nP_n = 0$, donc $\lambda_n = 0$ et enfin (1) donne $\lambda_0 = 0$.

4) a) $(P_0,\ldots,P_p)$ est une base de E_p et $P \in E_p$, donc P s'ecrit combinaison linéaire de cette famille, posons $P(x) = a_0P_0(x)+\ldots+a_pP_p(x)$ avec $a_p \neq 0$, car $\deg(P_k) = k$ et $\deg(P) = p$, or $\Phi(P) = n(n+1)P$ et $\Phi(P_k) = n(n+1)P_k$, d'où l'on obtient :
$2a_1P_1(x)+\ldots+p(p+1)a_pP_p(x)$
$= n(n+1)a_0P_0(x)+\ldots+n(n+1)a_pP_p(x)$, on fait la différence donc : $(n(n+1)-1)a_0P_0(x)+\ldots+(n(n+1)-p(p+1))a_pP_p(x) = 0$, or $(P_0,\ldots,P_p)$ est libre donc $(n(n+1)-p(p+1))a_p = 0$, d'où $n(n+1)-p(p+1) = 0$ car $a_p \neq 0$, d'où $n^2-p^2+n-p =$

$(n-p)(n+p+1)=0$, d'où $n=p$ car $n+p+1\neq 0$.

b) – $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k$, donc :

$$\begin{aligned}\Phi(P)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Phi(x^k)\\ &= -\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\alpha_k x^{k-2}+\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\alpha_k x^k\\ &= -\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\alpha_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\alpha_k x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(k\alpha_k-(k+2)\alpha_{k+2})x^k\\ &\quad +(n-1)n\alpha_{n-1}x^{n-1}+n(n+1)\alpha_n x^n\\ n(n+1)P(x) &= \sum_{k=0}^{n}n(n+1)\alpha_k x^k\end{aligned}$$

Par identification, puisque la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est libre, on a : $n(n+1)\alpha_{n-1}=(n-1)n\alpha_{n-1}$, d'où $\alpha_{n-1}=0$ car $n(n+1)\neq n(n-1)$. Mais aussi $(k+1)(k\alpha_k-(k+2)\alpha_{k+2})=n(n+1)\alpha_k$, d'où $(k(k+1)-n(n+1))\alpha_k=(k+1)(k+2)\alpha_{k+2}\quad(3)$

– Comme α_{n-1}, d'aprés la relation (3) on peut conclure que $\alpha_{n-3}=0$, puis $\alpha_{n-5}=0$, et ainsi de suite donc tous les α_k sont nuls pour k de même parité que $n-1$.

Toujours d'aprés la même relation, on peut exprimer α_{n-2} en fonction de α_n, puis α_{n-4}, en fonction de α_{n-2} et donc en fonction α_n et ainsi les α_k tel que k de même parité que n s'expriment en fonction de α_n.

c) Soit $P\in\mathrm{Ker}(\Phi-n(n+1)I_E)$, alors $\Phi(P)=n(n+1)P$, et donc tous les coéfficients de P s'expriment en fonction d'un seul paramètre qui est α_n, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi-n(n+1)I_E))=1$.

TROISIÉME PROBLÉME.

Première partie.

1) $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}[X],\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}D(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1)-(P+\lambda Q)(X)\\ &= (P(X+1)-P(X))+\lambda(Q(X+1)-Q(X))\\ &= D(P)+\lambda D(Q)\end{aligned}$$

d'où D est linéaire.
D'autre part si P est un polynôme, il est clair que $D(P)=P(X+1)-P(X)$ est un polynôme, donc $D:\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]$.
Donc D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) a) $P\in\mathrm{Ker}(D)\Longrightarrow P(X)=P(X+1)$, d'où les relations suivantes :

$$\begin{matrix}P(0)=P(1)\\ \vdots\\ P(n-1)=P(n)\end{matrix},$$

en sommant ces inégalités on obtient $P(n)=P(0)$.

b) Si $P\in\mathrm{Ker}(D)$, alors $P(n)=P(0),\quad\forall n\in\mathbb{N}$, donc le poynôme $Q(X)=P(X)-P(0)$, admet une infinité de racines, donc est nul. D'où $P(X)=P(0)$, donc $P\in\mathbb{R}_0[X]$, d'où $\mathrm{Ker}(D)\subset\mathbb{R}_0[X]$, l'autre inclusion est évidente d'où l'égalité.

3) a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P)=n$, posons $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, donc $D(P)(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kD(X^k)$, or $\forall k\geq 1, D(X^k)=(X+1)^k-X^k=kX^{k-1}+\ldots+1$, grâce à la formule du binôme de Newton, donc $\deg(D(X^k))=k-1$, et $\mathrm{co}(D(X^k))=k$, et donc $\deg(D(P))=n-1$ et $\mathrm{co}(D(P))=na_n$, où $a_n=co(P)$.

b) $D(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'aprés la question précèdente, en particulier $D(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4) D_n est la restriction de D sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D_n)=\mathrm{Ker}(D)\cap\mathbb{R}_n[X]=\mathbb{R}_0[X]$. la formule du rang s'écrit alors : $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])=\dim(\mathrm{Ker}(D_n)+dim(\mathrm{Im}(D_n))=\dim(\mathbb{R}_0[X])+dim(\mathrm{Im}(D_n))=1+dim(\mathrm{Im}(D_n))$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(D_n))=n=\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, or $\mathrm{Im}(D_n)=D(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où l'égalité.

5) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\deg(Q) = n-1$ avec $n \geq 1$, donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(D_n)$, d'où $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = D_n(P) = D(P)$, d'où D est surjective.

6) a) $P \in F \cap \mathrm{Ker}(D) \Longrightarrow P(0) = 0$ et P polynôme constante $\Longrightarrow P = 0$, donc $F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

D'autre part : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P(X) = \underbrace{a_0}_{\in \mathrm{Ker}(D)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k X^k}_{\in F}$

b) <u>Existence</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, comme D est surjective, alors $\exists P_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $D(P_0) = Q$, posons $P(X) = P_0(X) - P_0(0)$, donc $P(0) = 0$ et $D(P) = D(P_0 - a) = D(P_0) - D(a) = D(P_0) = Q$ où $a = P_0(0)$.
<u>Unicité</u> : Supposons qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 tel que $D(P_1) = D(P_2) = Q$ et $P_1(0) = P_2(0) = 0$, donc $D(P_1 - P_2) = 0$ et $(P_1 - P_2)(0) = 0$, d'où $P_1 - P_2 \in F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$, d'où $P_1 = P_2$.
$\deg(Q) = \deg(D(P)) = \deg(P) - 1$, d'où $\deg(P) = \deg(Q) + 1$.

Deuxième partie.

1) Simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utulisant la question 6.b.

2) $\deg(P_0) = 0$, donc $\deg(P_1) = 1$, or $P_1(0) = 0$, d'où $P_1(X) = aX$, or $D(P_1) = P_0$, d'où $a(X+1) - aX = 1$, d'où $a = 1$, et par suite $P_1(X) = X$.
De même $\deg(P_1) = 1$, donc $\deg(P_2) = 2$, or $P_2(0) = 0$, d'où $P_2(X) = aX^2 + bX$, or $D(P_2) = P_1$, d'où $a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X$, d'où $2aX + a + b = 1$, donc $a = \frac{1}{2}, b = -a = -\frac{1}{2}$ et par suite $P_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{X(X-1)}{2}$.

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est déja vrai pour $P_1(X) = X$.
Supposons $P_{n-1}(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+2)}{(n-1)!}$, et posons $P(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$, on a : $P(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} D(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= \frac{(X+1)X\ldots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\ldots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\ &= \frac{X(X-1)\ldots(X-n+2)}{(n-1)!} \\ &= P_{n-1}(X) \end{aligned}$$

Or P_n est l'unique polynôme qui vérifie cette relation, donc $P_n(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$.

4) Comme $\mathrm{Card}(P_0, \ldots, P_n) = n+1 = \dim(R_n[X])$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
En effet, on va raisonner par récurrence.
Pour $n = 1$, il est clair que $\{P_0(X) = 1\}$ est libre.
Supposons $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre et montrons que $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ l'est aussi.
Pour cela on suppose qu'ils existent des nombres réels $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$, donc

$$\begin{aligned} D(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1} P_{n+1}) &= \lambda_0 D(P_0) + \lambda_1 D(P_1) + \ldots + \lambda_{n+1} D(P \\ &= \lambda_1 P_0 + \ldots + \lambda_{n+1} P_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $D(P_0) = 0, D(P_k) = P_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n+1$, or la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, et par suite $\lambda_0 P_0 = \lambda_0 = 0$.

5) On rappelle d'abord que si on fait la division euclidienne par un polynôme de degré 1, on obtient une constante dans le reste.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leq n$
Faisons la division euclidienne de P, par X, on obtient $P(X) = XQ_0(X) + a_0$, avec $\deg(Q_0) = \deg(P) - 1 \leq n-1$.
Faisons aprés la division euclidienne de Q_0 par $\frac{X-1}{2}$, on obtient :
$Q_0(X) = \frac{X-1}{2} Q_1(X) + a_1$ tel que $\deg(Q_1) = \deg(Q_0) - 1 \leq n-2$, en particulier :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{X(X-1)}{2} Q_1(X) + a_1 X + a_0 \\ &= P_2(X) Q_1(X) + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X) \end{aligned}.$$

Aprés on fera la division euclidienne de Q_1 par $\dfrac{X-2}{3}$, on obtient : $Q_1(X) = \dfrac{X-2}{2}Q_2(X) + a_2$ tel que $\deg(Q_2) = \deg(Q_2) - 1 \leq n-3$, en particulier : $P(X) = P_3(X)Q_2(X) + a_2P_2(X) + a_1P_1(X) + a_0P_0(X)$. Et ainsi de suite, jusqu'à avoir $\deg(Q_n) \leq -1$, donc $Q_n = 0$ et par suite $P(X) = a_nP_n(X) + \ldots + a_1P_1(X) + a_0P_0(X)$

6) $X^2 = X.X, X = \dfrac{X-1}{2} + \dfrac{1}{2}$, donc :

$X^2 = \dfrac{X(X-1)}{2} + \dfrac{1}{2}X = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$.

$$X^3 = X.X^2,\ X^2 \quad \begin{aligned} &= 2X\frac{X-1}{2} + 1, X^3 \quad , \\ &= 2X\frac{X(X-1)}{2} + X \\ &= 2XP_2(X) + P_1(X) \end{aligned}$$

et enfin $2X = 6\dfrac{X-2}{3} + 1$, d'où
$$X^3 \begin{aligned}[t] &= \left(6\frac{X-2}{3} + 1\right)P_2(X) + P_1(X) \ . \\ &= 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X) \end{aligned}$$

7) a) Découle de la question 6.b) de la 1ère partie pour $Q(X) = X^n$.

b) $D(A_n) = X^n \Longrightarrow A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$, donc pour $0 \leq k \leq p$, on a : $A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$, d'où
$$S_{n,p} \begin{aligned}[t] &= \sum_{k=0}^{p} k^n \\ &= \sum_{k=0}^{p} A_n(k+1) - A_n(k) \\ &= A_n(p+1) - A_n(0) \\ &= A_n(p+1) \end{aligned}$$

c) On a : $D\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n$, d'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$, car $P_{k+1}(0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$, de plus $\deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \deg(P_{n+1}) \leq n+1$, or A_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui vérifie cette relation, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1} = A_n$.

d) On a : $X^2 = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$, d'où $A_2 = P_3(X) + \dfrac{1}{2}P_2(X)$.
Et aussi, $X^3 = 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X)$, donc :
$A_3 = 6P_4(X) + P_3(X) + P_2(X)$.

e) $S_{2,p} = A_2(p+1) = P_3(p+1) + \dfrac{1}{2}P_2(p+1)) = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{12}$.

$S_{3,p} = 6P_4(p+1) + P_3(p+1) + P_2(p+1) = \dfrac{p(p+1)(3p^2 - 7p + 10)}{12}$, aprés toute simplification en utilisant les relations : $P_2(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}, P_3(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}, P_4(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{12}$.

Fin.