Mercredi 13 Juin 2007.

CORRIGÉ

Problème.

1 Calculs de déterminants.

1.1 On a
$$a_{1,1} = \binom{p}{p},\ a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n},\ a_{1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}$$

1.2 On a
$$d_n = \det(1) = 1$$
$$d_{n-1} = \det\begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = 1$$
$$d_{n-2} = \det\begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix} = 1$$
ce dernier résultat résultant d'un calcul au brouillon non reporté.

1.3.1 On sait que $\binom{\beta}{\alpha} + \binom{\beta}{\alpha+1} = \binom{\beta+1}{\alpha+1}$ que l'on va utiliser sous la forme
$$\binom{\beta+1}{\alpha+1} - \binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta}{\alpha+1}$$
En notant $A'_p = (a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)
$$\forall i \geq 2,\ a'_{i,1} = 0 \ \text{ et } \ a'_{i,j} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

1.3.2 Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p) = \det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne, on obtient
$$d_p = \det(A'_p) = \det\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)_{2\leq i,j\leq n-p+1}$$

En opérant un changement d'indice ($i' = i-1$ et $j' = j-1$) ceci s'écrit

$$d_p = \det\left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1}\right)_{1\le i',j'\le n-(p+1)+1} = d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall p \in [|0,n|],\ d_p = d_n = 1$$

2.1 On a

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

2.2 Comme $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant multilinéaire, on a alors

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)^2 D_n$$

2.3 On a

$$\Delta_n = \left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\le i,j\le n} = \left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\le i',j'\le n+1} = d_0 = 1$$

et donc

$$D_n = \prod_{k=0}^{n} (k!)^2$$

2 Matrices de Gram.

A.1.1 Un calcul matriciel donne immédiatement

$$^tX_iCX_j = c_{i,j}$$

A.1.2 Si C est nulle alors ^tXCY est nul pour tout choix de X et Y. Réciproquement, si ceci a lieu c'est vrai en particulier pour les X_i et la question précédente donne la nullité de tous les $c_{i,j}$ c'est à dire de C.

A.2 Avec des notations évidentes, on a

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_i e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i (e_i|e_j) y_j$$

Par ailleurs,

$$^tXAY = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(AY)_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j$$

Par définition de A, on a donc

$$(x|y) = {}^tXAY$$

A.3.1 Comme $P = Mat(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, on a

$$X = PX'$$

A.3.2 D'après $A.2$, on a

$$^tXAY = (x|y) = {}^tX'A'Y'$$

Compte-tenu de la question précédente, on en déduit que

$$^tX'^tPAPY' = {}^tX'A'Y'$$

Comme ceci a lieu pour tout choix de X' et Y', la question $A.1$ donne

$$A' = {}^tPAP$$

A.3.3 Si on a $\mathcal{B}'$ orthonormale alors $A' = I_n$ et on obtient $^tPAP = I_n$.

A.3.4 On choisit $\mathcal{B}'$ orthonormale (une telle base existe). On a alors, en passant au déterminant

$$\det(P)^2\det(A) = \det(I_n) = 1$$

Comme $\det(P)^2 > 0$, on a donc $\det(A) > 0$.

A.3.5 Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une famille libre de E et F l'espace engendré par ces vecteurs. Le produit scalaire sur E en induit un sur F qui est donc préhilbertien. La matrice $B = ((\varepsilon_i|\varepsilon_j))$ correspond alors à la matrice A précédente et $\det(B) > 0$.

B.1.1 On a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) \\ (u_1|u_2) & \|u_2\|^2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette quantité est positive.

B.1.2 D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\det(M) = 0$ si et seulement si (u_1, u_2) liée. La famille est donc libre si et seulement si $\det(M) \neq 0$ (et dans ce cas $\det(M) > 0$).

B.2. On a

$$(MX)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j(u_i|u_j)$$

Par linéarité par rapport à la seconde variable du produit scalaire, on en déduit que

$$(MX)_i = (u_i|v)$$

B.3. On en déduit que

$${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} x_i(MX)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(u_i|v) = (v|v) = \|v\|^2$$

cette fois par linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire.

B.4. M étant symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une telle valeur propre. Il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. La question précédente donne

$$\lambda\|X\|^2 = {}^tXMX = \|v\|^2 \geq 0$$

et comme $\|X\|^2 > 0$, on a donc $\lambda \geq 0$.

B.5. Si $MX = 0$ alors $\|v\|^2 = {}^tXMX = 0$ et donc $v = 0$.
Réciproquement, on suppose que $v = 0$. D'après la question $B.2$ tous les coefficients de MX sont nuls et donc $MX = 0$.

B.6. On suppose M inversible. Supposons $\sum x_iu_i = 0$; on a alors $MX = 0$ où X est la matrice unicolonne de coordonnées x_i. Comme M est inversible, ceci implique que $X = 0$ et donc que $\forall i,\ x_i = 0$. La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est donc libre.

3 Application en dimension 3.

1. Le discriminant du polynôme vaut

$$4\cos^2(\beta)\cos^2(\gamma)+4-4\cos^2(\beta)-4\cos^2(\gamma) = 4(1-\cos^2(\gamma))(1-\cos^2(\beta)) = (2\sin$$

On en déduit que les racines de P sont

$$\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma) = \cos(\beta+\gamma)$$

$$\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma) = \cos(\beta-\gamma)$$

2. On a

$$\det(G(u_1,u_2,u_3)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première colonne donne

$$\det(G(u_1,u_2,u_3)) == -(\cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)-$$

et donc

$$\det(G(u_1,u_2,u_3)) = -(\cos(\alpha)-\cos(\beta+\gamma))(\cos(\alpha)-\cos(\beta-\gamma))$$

3. Le déterminant précédent est positif et le produit $(\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha) - \cos(\beta-\gamma))$ est donc négatif. $\cos(\alpha)$ doit donc être compris entre $\cos(\beta-\gamma)$ et $\cos(\beta+\gamma)$.

4. Le déterminant est nul si et seulement si $\cos(\alpha) = \cos(\beta+\gamma)$ ou $\cos(\alpha) = \cos(\beta-\gamma)$.

- Comme $\alpha, \beta-\gamma \in [0,\pi]$, la seconde égalité implique $\alpha = \beta-\gamma$ ou encore $\alpha+\gamma = \beta$. Comme $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$ on a alors $\gamma = 0$ et $\alpha = \beta$ et donc $\alpha = \beta+\gamma$.
- Comme $\alpha \in [0,\pi]$ et $\beta+\gamma \in [0,2\pi]$, la première égalité implique $\alpha = \beta+\gamma$ ou $\alpha = 2\pi-\beta-\gamma$.

Si le déterminant est nul on a donc $\alpha = \beta+\gamma$ ou $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$. La réciproque est immédiate.

5.1. On a

$$\det(G(u_1,u_2,u_3)-xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & c & c \\ c & 1-x & c \\ c & c & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1-2c)(x-1+c)^2$$

Les valeurs propres de $G(u_1,u_2,u_3)$ sont donc $1+2c$ et $1-c$.

5.2. Comme les valeurs propres de $G(u_1,u_2,u_3)$ sont positives (II.B.4) on a donc $c \geq -\frac{1}{2}$. Il est par ailleurs possible que c prenne cette valeur (quand les trois vecteurs sont coplanaires, u_2 et u_3 s'obtenant par rotation d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$ du vecteur u_1).
$-1/2$ est donc la plus petite valeur possible pour c.

5.3.1 Comme $c = -1/2$, $G(u_1,u_2,u_3) = 0$ et la famille (u_1,u_2,u_3) est liée. On est dans la situation évoquée à la question précédente et

$$u_1+u_2+u_3 = 0$$

5.3.2 On a $G(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang au moins 2 (deux premières colonnes libres). Son noyau est de dimension au plus 1. Comme $(1,1,1)$ est dans le noyau de $G(u_1,u_2,u_3)$, on a donc

$$\mathrm{Ker}(G(u_1,u_2,u_3)) = Vect((1,1,1))$$

D'après II.B.5 on a $v = u_1+u_2+u_3$ qui est nul.

4 Distance à un sous-espace.

1.1. Dans $\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_n))$, la dernière colonne puis la dernière ligne se factorisent par λ. Par multilinéarité du déterminant vis à vis des lignes ou colonnes, on a donc

$$\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n))$$

1.2. Dans $\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\lambda v_1))$, on fait l'opération élémentaire (qui laisse le déterminant invariant) $L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1$. On fait alors la même opération sur la n-ième colonne du déterminant obtenu. On obtient alors

$$\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n\lambda v_1)) = \det(G(v_1,\dots,v_n)$$

2.1. w étant orthogonal à F est orthogonal à tous les v_i. $G(v_1,\dots,v_n,w)$ s'écrit donc, par blocs, $\begin{pmatrix} G(v_1,\dots,v_n) & 0 \\ 0 & \|w\|^2 \end{pmatrix}$ et ainsi (déterminant bloc-diagonal ou développement par rapport à la dernière colonne)

$$\det(G(v_1,\dots,v_n,w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

2.2. Soit $p(v)$ le projeté orthogonal de v sur F (qui existe car F est de dimension finie) et $w = v - p(v)$. Comme $w \in F^\perp$, la question précédente donne

$$\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n,w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

Le cours indique que $d(v,F) = \|w\|$ et on a donc montré que

$$\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n,v-p(v))) = (d(v,F))^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

Par ailleurs $p(v) \in F$ s'écrit $p(v) = \sum \lambda_i v_i$. En itérant le résultat de la question IV.1.2 (où $v_1,\dots,v_{n-1}$ jouent des rôles symétriques) on a donc

$$det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v)) = (d(v,F))^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

3.1. $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (seul problème d'intégrabilité au voisinage de l'infini) et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de l'infini (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^a t^{k+1}e^{-t}\,dt = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^a + (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}\,dt$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N},\ J_{k+1} = (k+1)J_k$$

Comme $J_0 = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ J_k = k!$$

3.2. On a alors

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ (e_i|e_j) = J_{i+j} = (i+j)!$$

3.3. La question IV.2.2 donne alors

$$d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = (n!)^2$$

et on a montré que

$$d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = n!$$

Exercice.

1) $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0 \iff h = Cte$ qui ne dépond pas de v mais seulement de u, donc $h(u,v) = h_1(u)$, comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1 : (u,v) \mapsto ue^v$ et $\Phi_2 : (u,v) \mapsto e^{-v}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, $\forall\,(x,y) \in \Omega, \exists! v = -\ln y \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^{-v}$ et $\exists! u = xy \in \mathbb{R}$ tel que $x = ue^v$, donc $\exists!(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) = \Phi(u,v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'aprés ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x,y) = (xy, -\ln y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées Φ_1^{-1} : $(x,y) \mapsto xy$ et $\Phi_2 : (x,y) \mapsto -\ln y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3) a) $f^* = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial y} = e^v\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial y} = ue^v\frac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'aprés la question précèdente, on a :
$\dfrac{\partial f^*}{\partial v} = ue^v\dfrac{\partial f}{\partial x} - e^{-v}\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $f^*(u,v) = F(u)$ et par suite $f(x,y) = f \circ \Phi(u,v) = f^*(u,v) = F(u) = F(xy)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

4) a) Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la forme $g(x,y) = \alpha x + \beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x} - y\dfrac{\partial g}{\partial y} = ax + by \iff \alpha x - \beta y = ax + by$, prendre donc $g(x,y) = ax - by$.

b) La solution générale, f de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = ax + by$, s'écrit sous la forme $f = f_H + g$, où $f_H(x,y) = F(xy)$ est la solution générale de l'équation homegène sans second membre, et $g(x,y) = ax - by$ une solution particulière de l'équation avec second membre.

$\boxed{\text{Fin.}}$