

DL 5 : *Espaces vectoriels*

A rendre Jeudi le 12 Février 2004

On appelle *suite récurrente linéaire* toute suite (a_n) définie à l'aide d'une relation de type :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \text{ connus} \\ u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où a, b deux réels donnés et fixés dans tout le problème, on note par \mathfrak{R} l'ensemble de telles suites.

1. Montrer que \mathfrak{R} est un \mathbb{R} -sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2. Soit $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(a_n) \rightarrow (a_0, a_1)$, montrer qu'elle est bien définie .

3. Montrer que φ est un isomorphisme , en déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R})$.

On considère l'équation : $X^2 - aX - b = 0()$, $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ son discriminant.*

4. On suppose $\Delta > 0$ et soient r_1, r_2 les solutions réelles de $(*)$.

(a) Montrer que : $\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ est une base de \mathfrak{R} .

(b) En déduire la forme générale des éléments de \mathfrak{R} .

(c) Trouver l'expression de la suite de *Fibonacci* : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

5. On suppose $\Delta = 0$ et soient r la solutions réelle de $(*)$.

(a) montrer que $\{(r^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nr^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ est une base de \mathfrak{R} .

(b) En déduire la forme générale des éléments de \mathfrak{R}

(c) Trouver l'expression de la suite $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

6. On suppose $\Delta < 0$ et soient $\lambda = re^{i\theta}, \mu = re^{-i\theta}$ les solutions réelles de $(*)$.

(a) montrer que $\{(r^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (r^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}\}$ est une base de \mathfrak{R}

(b) En déduire la forme générale des éléments de \mathfrak{R}

(c) Trouver l'expression de la suite : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = -1 \\ 4u_{n+1} = -2u_n - u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

DS 2000-2001

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSE 2 Casablanca Maroc