MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°5

Corrigé

Espaces Vectoriels
Durée. 4 *heures*

Probléme 1:

1. Vu en TD
2. Vu en TD
3. Vu en TD
4.
   a. Vu en TD
   b. Vu en TD
5.
   a. Vu en TD
   b. Vu en TD
6.
   a. Vu en TD
   b. Vu en TD
7. montrer que u est injective,$u^2 = au + bid_E \Rightarrow u = aid_E + bu^{-1} \Rightarrow u^{-1} = \frac{u - aid_E}{b}$
   a. $\{id_E, u\}$ est libre dans $\pounds(E)$ car id_E, u ne sont pas proportionnels puisque u n'est pas une homothetie
   b. $u^n = a_n u + b_n\, id_E \Rightarrow u^{n+1} = a_n u^2 + b_n\, u = \left(aa_n + b_n\right)u + ba_n id_E$
   c. $a_{n+1} = aa_n + b_n, b_{n+1} = ba_n$en fonction de a_n, b_n
   d. $a_{n+1} = aa_n + b_n = aa_n + ba_{n-1}$
   e. Utiliser les questions (4),(5) ou (6)
8.
   a. $f^2 = 2f - id_{IR^2}, (*)X^2 - 2X + 1 = 0$
   b. $f^2 = 2f + id_{IR^2}, (*)X^2 - 2X - 1 = 0$
   c. $f^2 = -2f - 4id_{IR^2}, (*)X^2 + 2X + 4 = 0$

Probléme 2:

1. a. $f^3 = f,$
   b. f un inverse faible de $f,$ et un pseudo-inverse de f
2.
   a. $uovouov = uov, vouovou = vou$
   b. $rg(fog) \leq rg(f)$ car $\mathrm{Im}(fog) \subset \mathrm{Im}(f),$ d'autre part $Ker(g) \subset Ker(fog)$ la formule du rang permet d'affirmer que : $rg(fog) \leq rg(g)$
   c. $rg(uov) \leq rg(u) = rg(uovou) \leq rg(vou),$ de meme $rg(vou) \leq rg(uov),$ d'où les 3 egalités
3. $v = u^{-1}$
4.
   a.
   b.
5.
   a. d'aprés la formule du rang

b. *Exixtence*:$\forall x \in E, \exists (x_1,x_2) \in \mathrm{Im}(u)\ x Ker(u) \,/\, x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathrm{Im}(u) \Rightarrow \exists z \in E \,/$ $x_1 = u(z) \Rightarrow \exists (y_1,y_2) \in \mathrm{Im}(u)\ x Ker(u) \,/\, z = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 = u(y_1)$ prendre $y = y_1$ on a : $y = y_1 \in \mathrm{Im}(u), u(y) - x = x_1 - x = -x_2 \in Ker(u)$

Unicité:Soit $(y_1,y_2) \in \mathrm{Im}(u)^2 \,/\, (u(y_1) - x, u(y_2) - x) \in Ker(u)^2$ donc $u(y_1) - x - (u(y_2) - x) = u(y_1 - y_2) \in Ker(u)$ or $u(y_1 - y_2) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(y_1 - y_2) = 0$ car $\mathrm{Im}(u) \cap Ker(u) = \{0_E\}$ donc $y_1 - y_2 \in Ker(u)$or $u(y_1 - y_2) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $y_1 - y_2 = 0$

c. Utilisez l'unicité: meme methode avec laquelle on a montré dans le cours que les projections sont lineaires

d. car $y \in \mathrm{Im}(u)$

e. Soit $x \in E, \forall z \in E$ on a :$u(v(z)) - z \in Ker(u)$ en particulier pour $z = u(x)$ on a :$u(v(u(x))) - u(x) \in Ker(u)$ or $u(v(u(x))) - u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(v(u(x))) - u(x) = 0_E, \forall z \in E$.d'autre part :$vouov(x) \in \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$

6.

a. on a deja $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$ or $u = uovou = vou^2$ d'ou l'autre inclusion

b. $u = uovou = u^2ov \Rightarrow Ker(v) \subset Ker(u), v = vouov = v^2ou \Rightarrow Ker(u) \subset Ker(v),$

c. $\forall x \in E, x = v(u(x)) + (x - v(u(x))), (v(u(x)), (x - v(u(x)))) \in \mathrm{Im}(u)\ x Ker(u)$

d. $uovouov = uov,$donc uov est la projection sur $\mathrm{Im}(uov) = \mathrm{Im}(u)$ parallélement a $Ker(uov) = Ker(u)$

7. une CNS pour que u admet un pseudo-inverse est : $E = Ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u),$la méthode pour le trouver consiste a prendre $v(x) = y = uop(x), p$ la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallélement a $Ker(u)$