DS 5 : *Espaces Vectoriels*

Jeudi le 12 Février 2004

Durée : *3h 30mn*

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend : 2 pages numérotées 1, 2

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Le probléme est tiré du CONCOURS COMMUN SUP 2000 DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALèS, DOUAI, NANTES avec de légéres modifications.

Les parties I , II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Préambules

Soit n un entier naturel non nul.On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle.Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E), f^0 = Id_E$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + Id_E)^{2n} - Id_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

Partie I : 3 points.

1. *(0.75 pts)* .Déterminer les racines de $(z+1)^{2n} - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On écrira les racines non nulles sous forme trigonométrique.
2. *(0.75 pts)* .On pose : $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que :
$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$
3. *(0.5 pts)* .On pose : $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .En déduire que : $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. *(1 pt)* .Calculer Q_n puis P_n .On pourra utiliser sans le démontrer le resultat suivant : le produits des solutions non nulles de l'équation de la question *(1)* et égal à *-2n* .

Partie II : 3 points

1. *(0.75 pts)* .Trouver les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.
2. *(0.75 pts)* .En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_{2n}^{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{C}_{2n}^{2k+1}$.

3. *(1 pt)* .Si s est une symétrie de E, exprimer $(s+Id_E)^{2n}-Id_E$ en fonction de s,S et Id_E.
4. *(0.5 pts)* .En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

<u>*Partie III*</u> *: 15 points*

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$,on associé l'application $g_{a,b}$ définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$g_{a,b}:\begin{array}{l}\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3\\(x,y,z)\longmapsto(ax+b(y+z),ay+b(z+x),az+b(x+y))\end{array}$$

1. *(0.5 pts)* .Montrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$.
2. *(1 pt)* .Montrer que l'application : $\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)\\(a,b)\longmapsto g_{a,b}\end{array}$ est linéaire injective .
3. *(1 pt)* .On pose $G=\left\{g_{a,b}\quad\text{tel que }(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$ .Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, donner sa dimension .
4. *(1 pt)* .Vérifier que G est une sous-algébre de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$.

   On se propose dans la suite à résoudre l'équation : (*) $(f+Id_{\mathbb{C}^3})^{2n}-Id_{\mathbb{C}^3}=\theta$ où l'inconnue $f\in G$.
5. *(0.75 pts)* .Quelles sont les solutions si *b=0* .

   On suppose dans le reste du probléme $b\neq 0$, et on note $g_{a,b}$ par g tout simplement .
6. *(1.25 pts)* .Montrer que $\mathbb{K}er\,(g-(a+2b)Id_{\mathbb{C}^3})$ est un sev de $\mathbb{C}^3$ de dimension 1 , donner une base $\{e'_1\}$.
7. *(1.25 pts)* .Montrer que $\mathbb{K}er\,(g-(a-b)Id_{\mathbb{C}^3})$ est un sev de $\mathbb{C}^3$ de dimension 2 , donner une base $\{e'_2,e'_3\}$

   Pour les candidats n'ayant pas ruessi à trouver les vecteurs e'_1,e'_2,e'_3 ils peuvent prendre la suite : $e'_1=(1,1,1),e'_2=(-1,1,0),e'_3=(-1,0,1)$.
8. *(0.75 pts)* .Montrer que (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de $\mathbb{C}^3$,on la note *B'*.
9. *(1 pt)* .Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ qui transforme une base en une base est un automorphisme .
10. *(0.75 pts)* .On note par $B=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et h l'application linéaire qui transforme *B'* en B .en déduire que h est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ et préciser sa réciproque .
11. *(1.5 pts)* .Montrer que g solution de (*) $\Longleftrightarrow$ $hogoh^{-1}$ solution de (*) .
12. *(1.75 pts)* .Calculer $hogoh^{-1}(e_i);1\leqslant i\leqslant 3$.En déduire $hogoh^{-1}(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$.
13. *(1.25 pts)* .En déduire $\left(hogoh^{-1}+Id_{\mathbb{C}^3}\right)^{2n}(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$.
14. *(0.75 pts)* .Trouver tous les couples $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ pour lesquels $hogoh^{-1}$ solution de (*) .
15. *(0.5 pts)* .Répondre au probléme posé dans la partie III .

FIN