DS 5 : *Espaces Vectoriels*

Jeudi le 12 Février 2004

Corrigé

Partie I

1. $(z+1)^{2n}-1=0 \Leftrightarrow z+1$ racine n^{eme} de l'unité $\Leftrightarrow \exists 0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ tel que : $z+1=e^{\frac{2ik\pi}{2n}}=e^{\frac{ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z=e^{\frac{ik\pi}{n}}-1=2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n}}=2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}}$.
2. Posons $j=2n-k$, on a $P_n=\prod_{j=2n-1}^{n+1}\sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right)=\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\pi-\frac{j\pi}{2n}\right)=\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.
3. $Q_n=\prod_{j=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)=\prod_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)=P_n^2$.
4. Soit z_k les racines non nulles de l'équation donc :
$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k=\prod_{k=1}^{2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}=2^{2n-1}i^{2n-1}\exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}k\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
d'où $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k=2^{2n-1}\frac{(-1)^n}{i}\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right)Q_n$; or $\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right)=e^{in\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^n}{i}$ d'où
$Q_n=2n\times 2^{1-2n}=\frac{n}{4^{n-1}}$ et $P_n=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Partie II

1. Soit $f=\alpha I_E$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$, on a f solution :
$\Leftrightarrow \big((\alpha+1)^{2n}-1\big)Id_E=\Theta \Leftrightarrow (\alpha+1)^{2n}-1=0 \Leftrightarrow \exists \quad 0\leqslant k\leqslant 2n-1 : \alpha=z_k$
2. $4^n=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k=S+S', 0=(-1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2n}^k=S-S'$
D'où $S=S'=2^{2n-1}$.
3. On a $s^2=Id_E$ donc $s^k=s$ si k impair et $s^k=Id_E$ si k pair .De plus s et I_E <u>commutent</u> donc, d'après la formule du binôme,
$(s+Id_E)^{2n}-Id_E=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k s^k-Id_E=S's+(S-1)Id_E=Ss+(S-1)Id_E$
4. On a donc s solution ssi $s=\alpha Id_E$ avec $\alpha=\frac{1-S}{S}$ or s symétrie, donc $\alpha^2=1$ c-à-d : $S=\frac{1}{2}$, or $S=4^{n-1}$! Il n'y a donc aucune symétrie solution.

Partie III

1. Montrer que : $g_{a,b}(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')=g_{a,b}(x,y,z)+\lambda g_{a,b}(x',y',z')$.
2. Linéarité : Montrer que $g_{a+\lambda a', b+\lambda b'}=g_{a,b}+\lambda g_{a',b'}$
Injection : Montrer que $g_{a,b}=0 \Longrightarrow a=b=0$
3. $G=\varphi(\mathbb{C}^2), \varphi$ linéaire et $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel , donc G aussi .
$G=\varphi(\mathbb{C}^2), \varphi$ linéaire <u>injective</u> et $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel de dimension 2, donc G aussi .
4. $Id_{\mathbb{C}^3}=g_{1,0}\in G$ et si $(g,g')\in G^2$ on a : $g=g_{a,b}; g'=g_{c,d}$ .Toit calcul fait on vérifie que : $g\circ g'=g_{ac+2bd, ad+bc+bd}\in G$.

5. Si b=*0* et $f = g_{a,b}$ solution alors $f = aId_{\mathbb{C}^3}$ est une homothetie solution ,on utilise alors les resultats de la Partie II.

6. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, $X \in \mathbb{K}er\,(g-(a+2b)Id_{\mathbb{C}^3}) \iff (g-(a+2b)Id_{\mathbb{C}^3})(x,y,z) = (0,0,0) \iff$ $\begin{cases} b(-2x+y+z)=0 \\ b(x-2y+z)=0 \\ b(x+y-2z)=0 \end{cases}$. Comme $b \neq 0$, $X \in E_1 \iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 3y-3z=0 \\ 0=0 \end{cases}$
d'où $\mathbb{K}er\,(g-(a+2b)Id_{\mathbb{C}^3}) = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{C}\} = Vect(e'_1)$ avec $e'_1 = (1,1,1) \neq (0,0,0)$ donc e'_1 base de $\mathbb{K}er\,(g-(a+2b)Id_{\mathbb{C}^3})$.

7. Un calcul pareil que le précédent montre que :
$\mathbb{K}er\,(g-(a-b)Id_{\mathbb{C}^3}) = \{(-y-z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{C}^2\} = Vect(e'_2, e'_3)$
Où $e'_2 = (-1,1,0)$ et $e'_3 = (-1,0,1)$. e'_2 et e'_3 n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2, donc une base.

8. il suffit de montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est libre dans $\mathbb{C}^3$,et conclure que c'est une base puisque $Card(B') = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3) = 3$.

9. Soit $u : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ qui vérifie la proprieté , montrer que u bijective se raméne montrer qu'il est injective puisque la dimension de l'ev du départ est égale a celle de l'arrivé ; et pour montrer que u est injective il suffit de prendre $X \in \mathbb{K}er(u)$ et montrer que X=*0*.En effet $X \in \mathbb{K}er(u) \Rightarrow X = \sum a_i X_i, u(X) = 0$ car (X_i) génératrice $u(X) = 0 \Longrightarrow \sum a_i u(X_i) = u(0) = 0 \Longrightarrow a_i = 0$ car $(u(X_i))$ libre et donc X=*0*.

10. D'aprés la question précédente h est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ avec h^{-1} est l'application linéaire qui transforme B en B' .

11. Il suffit de remarquer que : $(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3})^{2n} = ho(g + Id_{\mathbb{C}^3})^{2n}oh^{-1}$.

12. $hogoh^{-1}(e_1) = h(g(h^{-1}(e_1))) = h(g(e'_1)) = h((a+2b)e'_1) = (a+2b)h(e'_1) = (a+2b)e_1$
On a utilisé ici le fait que $e'_1 \in \mathbb{K}er\,(g-(a+2b)Id_E)\,; h(e'_1) = e_1$ De même
$hogoh^{-1}(e_2) = (a-b)e_2; hogoh^{-1}(e_2) = (a-b)e_2$
donc : $hogoh^{-1}(x,y,z) = hogoh^{-1}(xe_1 + ye_2 + ze_3) = ((a+2b)x, (a-b)y, (a-b)z)$

13. $hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3}(x,y,z) = ((a+2b+1)x, (a-b+1)y, (a-b+1)z)$ par récurrence il est facile de montrer que :
$\left(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3}\right)^{2n}(x,y,z) = ((a+2b+1)^{2n}x, (a-b+1)^{2n}y, (a-b+1)^{2n}z)$

14. $hogoh^{-1}$ solution de (*) $\Leftrightarrow \left(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3})\right)^{2n}(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{a+2b+1})^{2n} - 1 = 0 \\ (\text{a-b+1})^{2n} - 1 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow a+2b, a-b$ solutions de l'équation de la Partie I $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{a+2b=z}_k \\ \text{a-b=z}_{k'} \end{cases}$. D'où on trouve a et b

15. On trouve les mêmes solutions que pour la question précédente en tenant compte du résulat (11) de la Partie III .

FIN