DS 5 : *Espaces Vectoriels*

Jeudi le 12 Février 2004

Corrigé

Partie I

1. $(z+1)^{2n}-1=0 \Leftrightarrow z+1$ racine n^{eme} de l'unité $\Leftrightarrow \exists 0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ tel que : $z+1=e^{\frac{2ik\pi}{2n}}=e^{\frac{ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z=e^{\frac{ik\pi}{n}}-1=2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n}}=2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}}$.
2. Posons $j=2n-k$, on a $P_n=\prod_{j=2n-1}^{n+1}\sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right)=\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\pi-\frac{j\pi}{2n}\right)=\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.
3. $Q_n=\prod_{j=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)=\prod_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)=P_n^2$.
4. Soit z_k les racines non nulles de l'équation donc :
$\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=\prod_{k=1}^{2n-1}2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}=2^{2n-1}i^{2n-1}\exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}k\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
d'où $\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=2^{2n-1}\frac{(-1)^n}{i}\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right)Q_n$; or $\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right)=e^{in\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^n}{i}$ d'où
$Q_n=2n\times 2^{1-2n}=\frac{n}{4^{n-1}}$ et $P_n=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Partie II

1. Soit $f=\alpha I_E$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$, on a f solution :
$\Leftrightarrow \left((\alpha+1)^{2n}-1\right)Id_E=\Theta \Leftrightarrow (\alpha+1)^{2n}-1=0 \Leftrightarrow \exists \quad 0\leqslant k\leqslant 2n-1 : \alpha=z_k$
2. $4^n=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k=S+S', 0=(-1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2n}^k=S-S'$
D'où $S=S'=2^{2n-1}$.
3. On a $s^2=Id_E$ donc $s^k=s$ si k impair et $s^k=Id_E$ si k pair .De plus s et I_E <u>commutent</u> donc, d'après la formule du binôme,
$(s+Id_E)^{2n}-Id_E=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^ks^k-Id_E=S's+(S-1)Id_E=Ss+(S-1)Id_E$
4. On a donc s solution ssi $s=\alpha Id_E$ avec $\alpha=\frac{1-S}{S}$ or s symétrie, donc $\alpha^2=1$ c-à-d : $S=\frac{1}{2}$, or $S=4^{n-1}$! Il n'y a donc aucune symétrie solution.

Partie III

1. Montrer que : $g_{a,b}(x+\lambda x',y+\lambda y',z+\lambda z')=g_{a,b}(x,y,z)+\lambda g_{a,b}(x',y',z')$.
2. Linéarité : Montrer que $g_{a+\lambda a',b+\lambda b'}=g_{a,b}+\lambda g_{a',b'}$
Injection : Montrer que $g_{a,b}=0 \Longrightarrow a=b=0$
3. $G=\varphi(\mathbb{C}^2),\varphi$ linéaire et $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel , donc G aussi .
$G=\varphi(\mathbb{C}^2),\varphi$ linéaire <u>injective</u> et $\mathbb{C}^2$ espace vectoriel de dimension 2, donc G aussi .
4. $Id_{\mathbb{C}^3}=g_{1,0}\in G$ et si $(g,g')\in G^2$ on a : $g=g_{a,b};g'=g_{c,d}$ .Toit calcul fait on vérifie que : $g\circ g'=g_{ac+2bd,ad+bc+bd}\in G$.

5. Si b=*0* et $f = g_{a,b}$ solution alors $f = aId_{\mathbb{C}^3}$ est une homothetie solution ,on utilise alors les resultats de la Partie II.

6. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $X \in \mathbb{K}er\,(g - (a + 2b)Id_{\mathbb{C}^3}) \Longleftrightarrow (g - (a + 2b)Id_{\mathbb{C}^3})(x, y, z) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow$ $\begin{cases} b(-2x + y + z) = 0 \\ b(x - 2y + z) = 0 \\ b(x + y - 2z) = 0 \end{cases}$. Comme $b \neq 0$, $X \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$
d'où $\mathbb{K}er\,(g - (a + 2b)Id_{\mathbb{C}^3}) = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{C}\} = Vect(e'_1)$ avec $e'_1 = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ donc e'_1 base de $\mathbb{K}er\,(g - (a + 2b)Id_{\mathbb{C}^3})$.

7. Un calcul pareil que le précédent montre que :
$\mathbb{K}er\,(g - (a - b)Id_{\mathbb{C}^3}) = \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2\} = Vect(e'_2, e'_3)$
Où $e'_2 = (-1, 1, 0)$ et $e'_3 = (-1, 0, 1)$. e'_2 et e'_3 n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2, donc une base.

8. il suffit de montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est libre dans $\mathbb{C}^3$,et conclure que c'est une base puisque $Card(B') = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3) = 3$.

9. Soit $u : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ qui vérifie la proprieté , montrer que u bijective se ramène montrer qu'il est injective puisque la dimension de l'ev du départ est égale a celle de l'arrivé ; et pour montrer que u est injective il suffit de prendre $X \in \mathbb{K}er(u)$ et montrer que X=*0*.En effet $X \in \mathbb{K}er(u) \Rightarrow X = \sum a_i X_i, u(X) = 0$ car (X_i) génératrice $u(X) = 0 \Longrightarrow \sum a_i u(X_i) = u(0) = 0 \Longrightarrow a_i = 0$ car $(u(X_i))$ libre et donc X=*0*.

10. D'aprés la question précédente h est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ avec h^{-1} est l'application linéaire qui transforme B en B' .

11. Il suffit de remarquer que : $(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3})^{2n} = ho(g + Id_{\mathbb{C}^3})^{2n}oh^{-1}$.

12. $hogoh^{-1}(e_1) = h(g(h^{-1}(e_1))) = h(g(e'_1)) = h((a + 2b)e'_1) = (a + 2b)h(e'_1) = (a + 2b)e_1$
On a utilisé ici le fait que $e'_1 \in \mathbb{K}er\,(g - (a + 2b)Id_E)\,; h(e'_1) = e_1$ De même
$hogoh^{-1}(e_2) = (a - b)e_2; hogoh^{-1}(e_2) = (a - b)e_2$
donc : $hogoh^{-1}(x, y, z) = hogoh^{-1}(xe_1 + ye_2 + ze_3) = ((a + 2b)x, (a - b)y, (a - b)z)$

13. $hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3}(x, y, z) = ((a + 2b + 1)x, (a - b + 1)y, (a - b + 1)z)$ par récurrence il est facile de montrer que :
$\left(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3}\right)^{2n}(x, y, z) = ((a + 2b + 1)^{2n}x, (a - b + 1)^{2n}y, (a - b + 1)^{2n}z)$

14. $hogoh^{-1}$ solution de (*) $\Leftrightarrow \left(hogoh^{-1} + Id_{\mathbb{C}^3})\right)^{2n}(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a+2b+1)}^{2n} - 1 = 0 \\ \text{(a-b+1)}^{2n} - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a + 2b, a - b$ solutions de l'équation de la Partie I $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{a+2b=z}_k \\ \text{a-b=z}_{k'} \end{cases}$. D'où on trouve a et b

15. On trouve les mêmes solutions que pour la question précédente en tenant compte du résulat (11) de la Partie III .

FIN

© : www.chez.com/myismail
Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc