DS 7 : *Programme du 2éme trimestre*

Samedi le 20 Mars 2004

Durée : 3h 30mn

Préambules :

L'énoncé de cette épreuve comporte 2 pages .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation .Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées .

Le probléme 1 est tiré du concours 1998 ESIM -Filiére MP .

PROBLÈME :

On considére dans tout ce probléme $p \in \mathbb{N}$ tel que $u = \sqrt[3]{p} \notin \mathbb{Q}$.

On rappel que : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on pose $\alpha = a + bu + cu^2; \beta = a + bju + cj^2u^2;$ $\gamma = a + bj^2u + cju^2$ où $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ fixés dans tout le probléme .

Partie 1 :

On se propose dans cette partie de chercher un polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont α, β, γ .

1. (0.5 pts) Montrer que $j^3 = 1; 1 + j + j^2 = 0$.
2. (0.5 pts) Montrer que : $\alpha + \beta + \gamma = 3a$.
3. (1.5 pts) Montrer que : $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\left[a^2 - bcp\right]$.
4. (0.75 pts) Montrer que : $\alpha\beta\gamma = a^3 + pb^3 + p^2c^3 - 3abcp$.
5. (1 pt) En déduire un polynôme de degré 3 unitaire dont les racines sont α, β, γ .
   Indication : On pourra exprimer les coefficients de ce polynôme en fonction de a,b et c en utilisant les relations de Newton entre racines et coefficients d'un polynôme .

Partie 2 :

On se propose dans cette partie de montrer que $\alpha\beta\gamma = 0 \implies a = b = c = 0$ .on va raisonrer par l'absurde

1. (0.5 pts) Quelle est la négation de $\alpha\beta\gamma = 0 \implies a = b = c = 0$.
2. (0.75 pts) Quelles sont les racines du polynôme $X^3 - p$.
3. (0.75 pts) Montrer que les polynômes $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$ ont au moins une racine commune
   Indication : On pourra distinguer les cas $\alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0$.
4. (1.5 pts) Montrer que $ac \neq b^2$.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde en distinguant les cas $c = 0$; $c \neq 0$.
5. Soit z une racine commune de $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$.
   (a) (0.5 pts) Si $c = 0$ .Montrer que $b \neq 0$; $z \in \mathbb{Q}$.

(b) (1.25 pts) Si $c \neq 0$ .Effectuer la division euclidienne de $X^3 - p$ par $cX^2 + bX + a$ et en déduire que : $z \in \mathbb{Q}$.

(c) (0.75 pts) Conclure puis en déduire une contradiction .

6. (0.5 pts) Dire pourquoi maintenant on peut affirmer que : $\alpha\beta\gamma = 0 \implies a = b = c = 0$.

Partie 3 :

Dans cette partie on définit l'endomorphisme du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$ suivant :

$$\Phi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x' = ax + pcy + pbz, y' = bx + ay + pcz, z' = cx + by + az)$$

et on se propose de calculer ses puissances .

1. (0.5 pts) Montrer que : $x' + y'u + z'u^2 = \left(a + bu + cu^2\right)\left(x + yu + zu^2\right)$.
2. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par : $\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow {}^3$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x' = pz, y' = x, z' = y)$$
λ une valeur propre de φ et (x, y, z) un vecteur propore associé ; c-à-d : $\varphi(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$
   (a) (0.75 pts) Montrer que λ est racine du polynôme $X^3 - p$, en déduire que u, ju, j^2u sont les valeurs propres de φ .
   (b) (1.5 pts) Trouver e_0 vecteur propre associé à u , e_1 associé a ju et e_2 associé à j^2u .
   Les candidats n'ayant pas pas arrivé à résoudre cette question peuvent vérifier que :
   $e_k = (j^{2k}u^2, j^k u, 1)$ répondent au probléme.
   (c) (0.75 pts) Montrer que (e_0, e_1, e_2) est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$.
   (d) (0.75 pts) Dire comment on peut calculer l'image par φ d'un élément de $\mathbb{C}^3$ à partir de $\varphi(e_0), \varphi(e_1), \varphi(e_3)$.
   (e) (1.25 pts) En déduire que $\varphi^3 = pId_{\mathbb{C}^3}$.
3. (0.75 pts) Calculer $\varphi^2(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.
4. (0.75 pts) En déduire que $\Phi = aId_{\mathbb{C}^3} + b\varphi + c\varphi^2$.
5. (0.75 pts) En déduire que e_0, e_1, e_2 sont des vecteurs propres de Φ préciser pour quelles valeurs propres elles sont associés .
6. (1.5 pts) Conclure enfin comment on peut calculer $\Phi^n(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

FIN