DS 7 : *Programme du 2éme trimestre*

Samedi le 20 Mars 2004

CORRIGÉ

PROBLÈME :

1. $1+j+j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$.
2. $\alpha+\beta+\gamma = 3a + ub\left[1+j+j^2\right] + u^2c\left[1+j+j^2\right] = 3a$; .
3. $\alpha\beta = a^2 + abju + acj^2u^2 + abu + b^2ju^2 + bcj^2u^3 + acj^2u^2 + bcju^3 + c^2j^2u^4$
   $= \left[a^2 + bcj^2p + bcjp\right] + u\left[abj + ab + c^2j^2p\right] + u^2\left[acj^2 + b^2j + acj^2\right]$
   $= \left[a^2 - bcp\right] + j^2u\left[c^2p - ab\right] + ju^2\left[b^2 - ac\right]$.
   Donc, en passant au conjugué, car $\gamma = \overline{\beta}$, on a : $\alpha\gamma = \left[a^2 - bcp\right] + ju\left[c^2p - ab\right] + j^2u^2\left[b^2 - ac\right]$
   et, en remplaçant u par ju ($j^2(ju)^2 = ju^2$) dans $\alpha\beta$, on a :
   $\beta\gamma = \left[a^2 - bcp\right] + u\left[c^2p - ab\right] + u^2\left[b^2 - ac\right]$ donc $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\left[a^2 - bcp\right]$.
4. $\alpha\beta\gamma = a\left[a^2 - bcp\right] + u\,a\left[c^2p - ab\right] + u^2\,a\left[b^2 - ac\right] + u\,b\left[a^2 - bcp\right] + u^2\,b\left[c^2p - ab\right] +$
   $pb\left[b^2 - ac\right] + u^2\,c\left[a^2 - bcp\right] + pc\left[c^2p - ab\right] + u\,pc\left[b^2 - ac\right] = a^3 + pb^3 + p^2c^3 - 3abcp$.
5. Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un tel polynoôme , donc $\alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{a_2}{a_3}$;
   $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\dfrac{a_1}{a_3}; \alpha\beta\gamma = -\dfrac{a_0}{a_3}$ or $a_3 = 1$ car P unitaire d'où
   $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)\,X^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,X - \alpha\beta\gamma$
   $= X^3 - 3a\,X^2 + 3\left[a^2 - bcp\right]X - \left[a^3 + pb^3 + p^2c^3 - 3abcp\right]$.

Partie 2 :

1. La négation de $\alpha\beta\gamma = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ est : " un nombre parmi α, β, γ est nul et un autre parmi a, b, c non nul ".
2. Soit $z \in \mathbb{C}$: z racine de $X^3 - p \Leftrightarrow z^3 = p = u^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{u}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{u} = 1, j \text{ou} j^2$ donc $z \in \left\{u, ju, j^2u\right\}$.
3. $\alpha = 0 \Rightarrow a + bu + cu^2 = 0 \Rightarrow u$ racine commune de $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$.
   $\beta = 0 \Rightarrow a + bju + cj^2u^2 = 0 \Rightarrow ju$ racine commune de $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$.
   $\gamma = 0 \Rightarrow a + bj^2u + cju^2 = 0 \Rightarrow a + bj^2u + cj^4u^2 = 0 \Rightarrow j^2u$ racine commune de $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$ .NB : $j^4 = j$.
4. supposons $ac = b^2$.
   Si $c = 0$ alors $b = 0$ et donc $a \neq 0$ puisque l'on supposé dans toute cette partie que l'un des nombres parmi a,b,c est non nul donc le polynôme $cX^2 + bX + a$ est le polynôme constant non nul a , en particulier n'admet aucune racine , ce qui contredit la question prédédente .
   Si $c \neq 0$ le déscriminant de $cX^2 + bX + a$ est $\Delta = b^2 - 4ac = -3b^2$ les racines de $cX^2 + bX + a$ sont alors : $z_1 = b\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2c} = j\,\frac{b}{c}; z_2 = b\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2c} = j^2\,\frac{b}{c}$ .D'aprés ce qui précéde l'une de ses racines est aussi racine du polynôme $X^3 - p$ donc $z_1^3 = p$ ou $z_2^3 = p$ d'où $\left(\frac{b}{c}\right)^3 = p$ d'où $\sqrt[3]{p} = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ .Contradiction aves les hypotéses initiales du probléme .
   Dans les deux cas on trouve une contradiction donc $ac \neq b^2$.

5. (a) $b \neq 0$ car $ac - b^2 = b^2 \neq 0$ et z sera racine de $bX + a$ donc $z = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

   (b) On trouve : $X^3 - p = \left(cX^2 + bX + a\right)\left(\frac{1}{c}X + \frac{b}{c^2}\right) + \frac{ac-b^2}{c^2}X + p - \frac{ab}{c^2}$.
   En remplaçant X par z on trouve : $\frac{ac-b^2}{c^2}z + p - \frac{ab}{c^2}$ donc $z = \frac{ab-pc^2}{ac-b^2} \in \mathbb{Q}$.

   (c) On peut conclure que pour z une racine commune de $cX^2 + bX + a$ et $X^3 - p$ on a $z \in \mathbb{Q}$ or la seule racine rationnelle de $X^3 - p$ est $\sqrt[3]{p}$ donc $\sqrt[3]{p} \in \mathbb{Q}$ .Contradiction aves les hypotéses initiales du probléme .

6. Parceque on a supposé le contraire et on a trouvé la contradiction : $\sqrt[3]{p} \in \mathbb{Q}$.

Partie 3 :

1. Simple vérifiation en remarquant que $u^3 = p$.

2. (a) $\varphi(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \Rightarrow (pz = \lambda x; x = \lambda y; y = \lambda z)$ d'où on trouve $pz = \lambda^3 z$ comme $z \neq 0$ (car $z = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre) on a donc $\lambda^3 = p$.

   (b) Il suffit de résoudre les systémes : $\varphi(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$ d'inconnues x, y, z où
   $\lambda \in \left\{1, ju, j^2u\right\}$.

   (c) Vérifier qu'elle est libre et remarquer que son cardinal est égal à $3 = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^3\right)$.

   (d) Il suffit d'écrire cet élément dans la base (e_0, e_1, e_2) et utiliser la linéarité de φ .

   (e) $\varphi(e_0) = ue_0 \Rightarrow \varphi^2(e_0) = \varphi(\varphi(e_0)) = \varphi(ue_0) = u\varphi(e_0) = u^2e_0 \Rightarrow \varphi^3(e_0) = u^3e_0 = pe_0$ de même $\varphi^3(e_1) = (ju)^3e_1 = pe_1; \varphi^3(e_2) = (j^2u)^3e_2 = pe_2$ et en tenant compte de la question précédente on aura $\varphi^3(x,y,z) = p(x,y,z)$.

3. Tout calcul fait on trouve $\varphi^2(x,y,z) = (py, pz, x)$.

4. Simple vérification de calcul une fois l'on a trouvé $\varphi^2(x,y,z) = (py, pz, x)$.

5. $\Phi(e_0) = ae_0 + b\varphi(e_0) + c\varphi^2(e_0) = ae_0 + bue_0 + bu^2e_0 = (a + bu + bu^2)e_0$ donc e_0 vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $a + bu + cu^2$ de même e_1 associé à $a + bju + cj^2u^2$ et e_2 associé à $a + bj^2u + cju^2$.

6. D'abord on a $\Phi^n(e_0) = (a + bu + bu^2)^n e_0; \Phi^n(e_1) = (a + bju + bj^2u^2)^n e_1;$
   $\Phi^n(e_2) = (a + bj^2u + bju^2)^n e_2$ et pour calculer $\Phi^n(x,y,z)$ il suffit d'écrire d'abord (x,y,z) dans la base (e_0, e_1, e_2) et utiliser la linéarité de Φ^n .

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc