Pb1

Soit E, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Questions préliminaires.
   Si u et v sont deux endomorphismes de E, montrer que :
   (P1) $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$
   (P2) $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v \circ u) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{\vec{0}_E\}$
   (P3) $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$
   (P4) $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im}(v) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(v) = E$

   Soit f, un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   On note $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (k\ \textit{fois})$.

2. On ordonne $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, par l'inclusion.
   Démontrer que la suite $\left(N_k = \operatorname{Ker}(f^k)\right)_{k\geq 0}$ est croissante et que la suite $\left(I_k = \operatorname{Im}(f^k)\right)_{k\geq 0}$ est décroissante.

3. On appelle *nilespace* et *coeur* de u les parties $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ de E définies par :
   $$\mathcal{N} = \bigcup_{k\geq 0} \operatorname{Ker}(f^k) = \bigcup_{k\geq 0} N_k \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \bigcap_{k\geq 0} \operatorname{Im}(f^k) = \bigcap_{k\geq 0} I_k\ .$$
   On rappelle que ces ensembles sont caractérisés par : pour tout $\vec{x} \in E$,
   $$(\vec{x} \in \mathcal{N}) \Leftrightarrow (\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \vec{x} \in N_{k_0}) \quad \text{et} \quad (\vec{x} \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N},\ \vec{x} \in I_k).$$
   Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont stables par f.
   (c) f est injectif $\Leftrightarrow \mathcal{N} = \{\vec{0}_E\}$.
   (d) f est surjectif $\Leftrightarrow \mathcal{C} = E$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n tel que $\operatorname{Ker}(f^{n+1}) = \operatorname{Ker}(f^n)$.
   (a) Démontrer alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(f^{n+k})$=$\operatorname{Ker}(f^n)$.
   (b) On désigne alors par p le plus petit des entiers naturels n tels que $\operatorname{Ker}(f^{n+1}) = \operatorname{Ker}(f^n)$.
   Démontrer que $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}(f^p)$.
   (c) Montrer : $\mathcal{N} \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{\vec{0}_E\}$.

5. On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel m tel que $\operatorname{Im}(f^{m+1}) = \operatorname{Im}(f^m)$.
   (a) Démontrer alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(f^{m+k}) = \operatorname{Im}(f^m)$.
   (b) On désigne alors par q le plus petit des entiers naturels m tels que $\operatorname{Im}(f^{m+1}) = \operatorname{Im}(f^m)$.
   Démontrer que $\mathcal{C} = \operatorname{Im}(f^q)$.
   (c) Montrer : $\mathcal{C} + \operatorname{Ker}(f^q) = E$.

6. Montrer que si $E = \mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors il existe un endomorphisme de E tel que q existe et p n'existe pas, et il existe un endomorphisme de E tel que p existe et q n'existe pas. Les exhiber et déterminer leur nilespace et coeur associés.

Pb2

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q, normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$.
   On note a et b ses zéros, distincts ou non.
   (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q.
   (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2.
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   (a) Déterminer a et b pour que $A(\mathrm{X})$ divise $A(\mathrm{X}^2)$.
   (b) Donner la liste des polynômes A vérifiant cette condition.
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   (a) Déterminer a et b pour que $B(\mathrm{X})$ divise $B(\mathrm{X}^3)$.
   (b) Donner la liste des polynômes B vérifiant cette condition.
   (c) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(\mathrm{X})$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-\mathrm{X})$ en est un aussi.
4. Un polynôme $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c.
   (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r.
   (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2.
   (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
   $P(\mathrm{X}^2) = -P(\mathrm{X})P(-\mathrm{X})$.
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
   (a) Calculer le produit $F_1(\mathrm{X})F_2(\mathrm{X})$.
   (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2.
   (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2.
   (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2, de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2.
   (e) Former les polynômes G et H tels que : $\begin{cases} G(\mathrm{X}) = -64\Phi_1(\mathrm{X})\Phi_2(\mathrm{X}) \\ H(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}G(\mathrm{X}) \end{cases}$
   (f) Etablir les égalités suivantes, pour tout réel θ : $\begin{cases} \sin 7\theta = \sin\theta\, G(\sin\theta) \\ \cos 7\theta = H(\cos\theta) \\ \cosh 7\theta = H(\cosh\theta) \end{cases}$
6. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Décrire la classe d'équivalence de x dans les cas suivants :
      i. $|x| > 1$
      ii. $|x| = 1$
      iii. $|x| < 1$
   (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
      i. Etablir que Γ est la réunion de la droite Δ d'équation $y = x$ et de trois ellipses.
      ii. Construire Γ en précisant les points multiples et les axes de symétrie.