# Corrigé DL 17

1) a) on a $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=q \end{cases}$ donc $p^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
$=a^2+b^2+2q$

d'où $\begin{cases} a^2+b^2=p^2-2q \\ a^2b^2=q^2 \end{cases}$

b) $a^2, b^2$ sont sol de $P \iff \begin{cases} a^2+b^2=-p \\ a^2b^2=q \end{cases} \iff \begin{cases} p^2-2q=-p \\ q^2=q \end{cases}$

$\iff q=0$ et $p^2+p=0$
$\begin{cases} q=1 \text{ et } p^2+p-2=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} q=0 \text{ et } p\in\{0,-1\} \\ q=1 \text{ et } p\in\{1,-2\} \end{cases}$ (*)

2) a) si $A(X)$ divise $A(X^2)$ alors $A(X^2)=B(X)A(X)$
donc $A(a^2)=A(b^2)=0$ d'où (*)
donc $A(X)=X^2$ ou $A(X)=X^2+X$
ou $A(X)=X^2+X+1$ ou $A(X)=X^2-2X+1$

donc les sol sont $\begin{cases} a=b=0 \\ a=1, b=0 \\ a=j, b=j^2 \\ a=b=1 \end{cases}$

b) déjà fait dans (a)

3) a) si $B(X)$ divise $B(X^3)$ alors $B(a^3)=B(b^3)=0$
donc $\{a^3,b^3\}=\{a,b\}$ car $a,b$ sont les seuls racines de $B$
d'où $a^3=a, b^3=b$ ou $a^3=b, b^3=a$
donc $b,a\in\{0,1\}$ ou $b=a^3=b^9$ d'où $a=b=0$
ou $b^3=1=a^3=1$

tq $a^3=b$ ou $a=e^{2ik\pi/4}=e^{ik\pi/4}$
$0\le k\le 7$

b) $a$ et $b$ racines de $B$ donc $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=q \end{cases}$

$a^3$ et $b^3$ racines de $B$ donc $\begin{cases} a^3+b^3=-p \\ a^3b^3=q \end{cases}$

d'où $q^3=q$ donc $q \in \{0,-1,1\}$

et $-p^3=(a+b)^3=a^3+3ab(a^2+b^2)+b^3=-p+3q(a^2+b^2)$

donc $3q(a+b)=0$

si $q \neq 0$ alors $a+b=-p=0$ donc $B(X)=X^2+1$ ou $B(X)=X^2-1$

si $q=0$ alors $B(X)=X^2-aX$ $b=0$ par exple

$a=0$ ou $b=0$ et $q^3=a$

c) Posons $C(X)=B(-X)$

on a $B(X^3)=Q(X)B(X)$ d'où $B(-X^3)=Q(-X)B(-X)$

donc $C(X^3)=Q(-X)C(X)$ d'où $C(X)$ divise $C(X^3)$

4) a) D'après les relations de Newton entre racines et coeff d'un polynôme on a

$\begin{cases} a+b+c=-p \\ ab+ac+bc=q \\ abc=-r \end{cases}$

or $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

d'où $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$

et $(ab+ac+bc)^2=(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+2abc(a+b+c)$

d'où $(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=q^2+2pr$

b) si $a^2, b^2, c^2$ sont aussi racines de $P$, alors

$a^2+b^2+c^2=-p^2$

$\begin{cases} (ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=q \\ (abc)^2=-r \end{cases}$ d'où $\begin{cases} p^2-2q=-p \\ q^2+2pr=q \\ r^2=-r \end{cases}$

d'où $r \in \{0,-1\}$

si $r=0$ alors $q^2=q$ d'où $q \in \{0,1\}$ puis on en déduit $p$

si $r=-1$ alors $\begin{cases} q^2-q=-2p & (1) \\ p^2+p=2q & (2) \end{cases}$ d'où $\left(\frac{q^2-q}{2}\right)+\frac{q^2-q}{2}=2q$

(2)

c) ~~r=0 ⇒ q=1 ; p=1~~

Si $r=-1$ alors $\begin{cases} p^2+2p=2q \\ q^2-2q=-2p \end{cases}$

en faisant la différence on obtient $p^2-q^2+p+q=2(q+p)$

d'où $(p+q)(p-q+1)=2(p+q)$

d'où $p+q=0$ ou $p-q=1$ ie $p=q+1$

Si $q=-p$ alors $p^2=-3p$ d'où $p=0$ ou $-3$ et $q=0$ ou $3$

Si $q=p-1$ alors $p^2+p=2p-2$ donc $p^2-p+2=0$

$$\left( \begin{array}{ll} p_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2} & \text{ou } p_2=\frac{1-i\sqrt{7}}{2} \\ q_1=-\frac{1+i\sqrt{7}}{2} & \text{ou } q_2=-\frac{1-i\sqrt{7}}{2} \end{array} \right) (*)$$

c) en resumé : i) $r=0$ $q=0$ ; $p \in \{0,-1\}$ $A(X)=X^3$ ou $X^3-X^2=X^2(X-1)$

ii) $r=0$, $q=1$, $p^2+p-2=0$ $q \in \{1,-2\}$

$A(X)=X^3+X^2+X=X(X^2+X+1)=X(X-j)(X-j^2)$

ou $A(X)=X^3-2X^2+X=X(X^2-2X+1)=X(X-1)^2$

iii) $r=-1$, $q=-p$ $p \in \{0,-3\}$ ; $q \in \{0,3\}$

$A(X)=X^3-1=(X-1)(X-j)(X-j^2)$

$A(X)=X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$

iii) $r=-1$, $q=p+1$ $p^2-p+2=0$ voir $(*)$

on vérifie cas par cas que $P(X^2)=-P(X)P(-X)$

5) a) les seuls polynômes à coeff non réels sont ceux du cas iii)

$F_1(X)F_2(X)=X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$

après calcul

b) $F_1(X)F_2(X) = \dfrac{X^7-1}{X-1}$ donc $X = e^{\frac{2ik\pi}{7}}$ $1 \le k \le 6$

$X \neq 1$

les racines de $F_1$ et $F_2$ sont de la forme

$\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$ $\quad 1 \le k \le 6$

c) par raison de symétrie on prend $-3 \le k \le 3$, $k \neq 0$

donc $\phi(X) = \prod_{k=1}^{3}\left(X - \cos\frac{2k\pi}{7}\right)$

d) $\phi_1(X) = \prod_{k=1}^{3}\left(X - \sin\frac{2k\pi}{7}\right)$ , $\phi_2(X) = \prod_{k=3}^{6}\left(X - \sin\frac{2k\pi}{7}\right)$

e) $G(X) = -64\prod_{k=1}^{6}\left(X - \sin\frac{2k\pi}{7}\right)$

f) Soit $T_7(t) = \cos(7\operatorname{Arccos} t)$ polynôme de Tchebychev

$\deg(T_7) = 7$

$\deg(T_7) = 2^6 = 64$

donc $\deg(T_7 + H) \le 6$

$T_7$ et $H$ ont $m$ racines

$T_7(\cos\theta) = \cos 7\theta = 0 \Leftrightarrow$

$7\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$

d'où $H = T_7$

6) a) facile

b) i) si $|x| > 1$

$x = \cosh\theta$

$y \le x \Leftrightarrow H(y) \le H(x) = H(\cosh\theta) = \cosh 7\theta$