CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 20 (08-09): *Structure d'espace vectoriel*

11 mai 2009

Blague du jour :
• Quel est le genre d'humour que les dindes n'aiment pas ?
Réponse : les farces.
• Pourquoi les lapins jouent-ils avec 46 cartes au lieu de 52 cartes ?
Réponse : parce qu'ils ont mangé les trèfles !
• C'est une bande de poissons en train de piller de la nourriture, un poisson voit une étoile de mer et dit : Attention voilà le shérif !

Mathématicien du jour ***Picard***
Charles Émile Picard, (1856-1941), est un mathématicien français. Il fût reçu deuxième au concours d'entrée de l'École polytechnique et premier à celui de l'École normale supérieure, et premier au concours d'agrégation de mathématiques. Il épouse la fille de son professeur Charles Hermite. Sa fille Louise Picard épousa le physicien Louis Dunoyer.

PROBLÉME : **Source : DL 2004-2005, PCSI-Compiègne, France.**

Extrait de e3a 2004 :

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes et n est un entier supérieur ou égal à 2. E est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension égale à n.On désigne par e l'application identique de E. Soit f un endomorphisme de E. On définit la suite $(f^p)_p$ par : $f^0 = e$ et $f^{p+1} = f \circ f^p$.

S'il existe un entier naturel non nul q tel que $f^q = 0$, l'endomorphisme f est dit nilpotent.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, on note $f_{|F}$ la restriction de f à F. $f_{|F}$ est une application linéaire de F vers E. Si de plus, F est stable par f, c'est-à-dire si $f(F)$ est inclus dans F, on pourra considérer $f_{|F}$ comme un endomorphisme de F.

1. Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel.

   (a) Prouver que : $\ker f^p \subset \ker f^{p+1}$ et que $f\left(\ker f^{p+1}\right) \subset \ker f^p$.

   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. on pose $u = f_{|F}$. Ecrire $\ker u$ en fonction de $\ker f$ et de F.

   (c) Considérer la restriction de f à $\ker f^{p+1}$ notée u pour démontrer que

   $$\dim \ker f^{p+1} \leqslant \dim \ker f^p + \dim \ker f$$

2. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

   (a) Prouver que 0 est la seule valeur propre de f, c'est-à-dire prouve que $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda = 0$.

   (b) Etablir que $f^n = 0$. (on pourra introduire $k \in \mathbb{N}^*$ plus petit entier tel que $f^k = 0$, et en considérant x_0 tel que $f^{k-1}(x_0) \neq 0$ montrer que $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{k-1}(x_0)\right)$ est libre)

   (c) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à $n-1$.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose que le rang de f est égal à $n-1$.

   (a) Montrer que : $\forall p \in \{0, 1, ..., n\}$, $\dim \ker f^p = p$ (indication : utiliser l'inégalité établie à la question 1.c) ci-dessus).

   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f, de dimension égale à p.
   Soit $u = f_{|F}$. Calculer u^p.

   (c) Démontrer qu'il existe $n+1$ sous-espaces vectoriels de E stables par f et qu'il s'agit des $\ker f^p$, p élément de $\{0, 1, ..., n\}$.

   (d) Montrer que $\forall p \in \{0, 1, ..., n\}$ $\mathrm{Im}\, f^p = \ker f^{n-p}$.

4. Pour cette question f est de nouveau un endomorphisme quelconque de E.

   (a) On considère deux vecteurs a et b appartenant à $\ker(f - \lambda e)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et un scalaire $\mu \in \mathbb{C}$, Vérifier que le sous-espace vectoriel V_μ engendré par $a + \mu b$ est stable par f.

   (b) En déduire que si $\dim \ker(f - \lambda e) \geqslant 2$, alors il existe une infinité de sous-espaces de E stables par f.

Fin
à la prochaine