# Corrigé DL 20

## Structure d'ev

1) a) . $x \in \operatorname{Ker} f^p \Rightarrow f^p(x) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(x) = f(0) = 0$ (car $f$ linéaire)
$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$

. $y \in f(\operatorname{Ker} f^{p+1}) \Rightarrow \exists x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$ tq $y = f(x)$
$\Rightarrow y = f(x)$ et $f^{p+1}(x) = 0$
$\Rightarrow f^p(y) = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} f^p$

b) $u : F \to E$, $x \mapsto f(x)$ $\quad x \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow x \in F$ et $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x \in F \cap \operatorname{Ker} f$

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f \cap F}$$

c) la formule du rang appliquée à $u = f_{|\operatorname{Ker} f^{p+1}}$
sachant que $\operatorname{Im} u = f(\operatorname{Ker} f^{p+1}) \subset \operatorname{Ker} f^p$
implique
$\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^{p+1}) + \dim f(\operatorname{Ker} f^{p+1})$
$\leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f^p)$

2 a) $\Rightarrow$ Soit $\lambda$ vap de $f$ on a $f^q = 0$ donc $\lambda^q = 0$ d'où $\lambda = 0$
inversement $f^{q-1} \neq 0$ et $f^q = 0$ donc $\exists x_0 = f^{q-1}(x) \neq 0$
tq $f(x_0) = 0$ donc $0$ vap de $f$

b) mq $(x_0, f(x_0), \dots f^{k-1}(x_0))$ est libre
supposons $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \dots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x_0) = 0$
et composons par $f^{k-1}$ donc $\lambda_0 f^{k-1}(x_0) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$
car $f^{k-1}(x_0) \neq 0$
puis composons par $f^{k-2}$ donc $\lambda_1 = 0$ et au moins de suite
la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre donc de
cardinal inférieur à la dimension
d'où $k \leq n$ or $f^k = 0$ d'où $f^n = 0$

c) on a déjà $\operatorname{Ker} f^{p+1} \subset \operatorname{Ker} f^{p+2}$. Inversement $x \in \operatorname{Ker} f^{p+2}$
$\Rightarrow f^{p+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$

$\Rightarrow f(x) \in \operatorname{Ker} f^p \Rightarrow f^{p+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$

c) on a $(f(x_1) \dots f^{k-1}(x_1))$ est libre en tant que sous famille d'une famille libre de plus incluse dans $\operatorname{Im} f$

donc $\operatorname{rg} f = \dim f \geq k-1$

d'autre part $\operatorname{Ker} f \neq 0$ car 0 vap de $f$

donc $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$ d'où $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$
$= \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$
$\leq n-1$

3) a) raisonnons par récurrence sur $p$

- $p=0$ $f^0 = id_E$ $\operatorname{Ker} f^0 = \{0\}$

- supposons que $\dim \operatorname{Ker} f^p = p$ où $p \leq n-1$

donc $\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} \leq \dim \operatorname{Ker} f^p + \dim \operatorname{Ker} f$

or $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = n-1$ et donc $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 1$

et donc $\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} \leq p+1$

supposons que $\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} < p+1$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} \leq p$

on sait que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et que $\dim \operatorname{Ker} f^p = p$

donc $\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} = \dim \operatorname{Ker} f^p$ et comme $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$

alors $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ donc $\operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^{p+2}$

et ainsi de suite donc

~~m~~ $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} 0 = E$

d'où $\dim \operatorname{Ker} f^p = p = n$

absurde car $p \leq n-1$

b) si $x \in F$ alors $u(x) = f(x)$ donc $u^p(x) = f^p(x)$

or $u^n(x) = f^n(x) = 0$ donc $u$ nilpotent et comme $\dim F = p$ alors $u^p = 0$

c) d'après b) $\forall x \in F$ on a $f^p(x) = 0$ donc $F \subset \operatorname{Ker} f^p$

et $\dim F = \dim \operatorname{Ker} f^p = p$ donc $F = \operatorname{Ker} f^p$

d'autre part $f(\operatorname{Ker} f^p) \subset \operatorname{Ker} f^{p-1} \subset \operatorname{Ker} f^p$

donc $\operatorname{Ker} f^p$ est stable

ainsi le seul sev stable de dimension $p$ est $\operatorname{Ker} f^p$

donc il y a exactt $n+1$ sev stable ce sont

$\operatorname{Ker} f^p \quad 0 \leq p \leq n$

d) On a $f^n = 0 \Rightarrow f^{n-p} \circ f^p = 0$ donc $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{n-p}$

or $\dim \operatorname{Im} f^p = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f^p = n-p$

$= \dim \operatorname{Ker} f^{n-p}$

d'où $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Ker} f^{n-p}$

4. a) Soit $x \in \operatorname{Vect}(a+\mu b)$ donc $x = \alpha(a+\mu b)$

or $f(a) = \lambda a$ et $f(b) = \lambda b$

d'où $f(x) = \alpha \lambda (a+\mu b) \in \operatorname{Vect}(a+\mu b)$

donc $\operatorname{Vect}(a+\mu b)$ stable

b) si $\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda e) \geq 2$ on choisit $\{a, b\}$ libre

ds $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)$ $\quad \forall \mu \neq \mu'$ on a aussi

$\{a+\mu b, a+\mu' b\}$ libre

donc $V_\mu \neq V_{\mu'}$

ainsi on construit une infinité de sev

stable ce sont les $V_\mu$ tq $\mu \in \mathbb{R}$

FIN