DL 6 : Espaces vectoriels

Problème I :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimensuin finie et E_1, E_2 deux sev de E supplémentaires, soit f un isomorphisme de E_2 dans E_1 et g un endomorphisme de $E_2, \forall x \in E, \exists! x_1 \in E_1, \exists! x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ on pose alors $h(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + g(x_2)$

1. Montrer que h est un automorphisme de E .
2. Soit λ une valeur propre de h et $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé à λ ,avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$
   (a) Montrer que $x_1 \neq 0_E, x_2 \neq 0_E, \lambda \neq 0$.
   (b) Montrer que x_2 est un vecteur propre de g (préciser pour quelle valeur propre il est associé) .
3. Soit μ une valeur propre de g, y un vecteur propre associe, en déduire une valeur propre de h , et un vecteur propre associe ,z ,(à exprimer en fonction de y, μ) .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Et $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de vecteurs propres de g tous associes à μ et $(z_j)_{1 \leq j \leq n}$ construits avec la méthode de (c) , montrer que $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ libre $\Rightarrow (z_j)_{1 \leq j \leq n}$ libre .

Problème II : $\forall x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = e^x, g(x) = e^{2x}, h(x) = e^{x^2}, \zeta = Vect\left(\{f, g, h\}\right)$.
Soit $\varphi : \zeta \to \zeta$ définie par : $\forall F \in \zeta : \varphi\left(F\right) = af + bg + ch$ tel que :

$$a = \frac{2F(0)}{e-1} + F'(0) + \frac{2F(1)}{e\left(e-1\right)}, b = -\frac{F(0)}{e-1} - \frac{F(1)}{e\left(e-1\right)}, c = \frac{\left(e-2\right)F(0)}{e-1} - F'(0) - \frac{F(1)}{e\left(e-1\right)}$$

Soit $\psi : \zeta \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall F \in \zeta : \psi\left(F\right) = (F(0), F'(0), F(1))$.
Soit $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \theta(a, b, c) = (a, b, -c)$.

1. Montrer que : $\{f, g, h\}$ est libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,en déduire $\dim \mathbb{R}\left(\zeta\right)$.
2. Montrer que : ψ est un isomorphisme .
3. Montrer que : $\varphi = \psi^{-1} o \theta o \psi$.
4. Calculer $\varphi o \varphi$, ,en deduire la nature de φ .
5. Montrer que : $\forall F \in \zeta : \varphi(F) = F \Leftrightarrow F(1) = 0$.
6. En déduire une base de $P = \{F \in \zeta / \varphi(F) = F\}$
7. Trouver une base de $D = \{F \in \zeta / \varphi(F) = -F\}$.
8. Reconnaitre φ.

FIN DE L'ÉNONCÉ.