DS 6.Bis : 2004–2005. Espaces vectoriels

Enoncé

CONCOURS COMMUN 2004
DES COLES DES MINES D'ALBI, ALS, DOUAI, NANTES
CONCOURS COMMUN SUP 2004 DES COLES DES MINES D'ALBI, ALS, DOUAI, NANTES
preuve Spécifique de Mathématiques : filière MPSI.

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme, $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels.

I. Etude de structures

1. (a) Démontrer que E, muni de laddition des matrices et de leur produit par un scalaire réel, est un espace vectoriel réel.
   (b) Trouver une base et la dimension de E.
2. (a) Démontrer que E est stable pour la multiplication des matrices.
   (b) En déduire que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau.
   (c) Cet anneau est–il commutatif ?
3. On désigne par G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$.
   Démontrer que G est un groupe multiplicatif.

II. Puissances dune matrice et suites

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$.
   (a) On suppose $a \neq b$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$
   (b) On suppose que $a = b$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$; on exprimera les coefficients en fonction de a et c.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$, en convenant $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tour réel x, $\varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} x^p$.
   (a) Rappeler l'inégalité de Taylor–Lagrange avec ses hypothèses.

(b) Démontrer que, pour x fixé, la suite de terme général $\varphi_n(x)$ converge et que sa limite est e^x.

(c) On suppose $a \neq b$.
Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \varphi_n(a)$ et $\varphi_n(b)$.
Démontrer que les suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) ont des limites respectives que l'on calculera.

(d) On suppose $a = b$.
Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \varphi_{n-1}(a)$ et $\varphi_n(a)$.
Démontrer que les suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) ont des limites respectives que l'on calculera.

6. Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$, on pose $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in E$, où α, β et γ ont été définis à la question 5, et on note f l'application de E dans E définie par $f(A) = A'$.

7. (a) L'application f est–elle linéaire ?
   (b) L'application f est–elle injective ?
   (c) L'application f est–elle surjective ?
   (d) Déterminer l'image de E par f.

8. On suppose maintenant que $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$.
On pose, pour $A \in E$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(f(A) - I_2)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ et $\psi_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p$.
   (a) Calculer a_n, b_n et c_n lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a = b$ (on pourra utiliser les résultats de la question 4).
   (b) Démontrer que si $0 < x < 1$, la suite de terme général $\psi_n(x)$, pour x fixé, converge vers $\ln(1 + x)$.
   (c) Dans chacun des deux cas précédents, démontrer que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) ont respectivement pour limites a, b et c.

FIN DU SUJET.