بسم الله الرحمن الرحيم
و قل إعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون
صدق الله العظيم

DL 6 (08-09): *Sous espaces vectoriels*

27 novembre 2008

PROBLÈME :
Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est dite **tridiagonale symétrique** si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ sont des réels.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices tridiagonales symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont on précisera la dimension et une base (cette dernière étant exprimée à l'aide des matrices élémentaires E_{ij}).

2.a. Dans cette question, on choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice L, de la forme $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix}$, à coefficients positifs, telle que $L\,{}^tL = A$.

b. En déduire que tout système linéaire d'écriture matricielle $AX = Z$ peut se ramener à la résolution successive de deux systèmes linéaires triangulaires dont on écrira la traduction matricielle (X et Z sont des matrices-colonnes à quatre lignes ; on introduira une matrice-colonne Y qui servira d'"inconnue intermédiaire").

c. Résoudre de cette façon le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 5 \\ 2x + 5y + 2z & = & 6 \\ 2y + 5z + 2t & = & -9 \\ 2z + 5t & = & -1 \end{array}\right..$$

3.a. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, soit n un entier naturel non nul. Simplifier l'expression

$$(I - M)\,(I + M + M^2 + \cdots + M^{n-1}),$$

où I représente la matrice-unité d'ordre 4.

b. Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels. Calculer (en utilisant par exemple les matrices élémentaires) S^2, S^3 et S^4.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** que la matrice $L = I - S$ est inversible et déterminer L^{-1}.

4. On reprend les matrices A et L de la question **2.a.**. Calculer L^{-1}, puis A^{-1}.

5) Resoudre (S)

****