CPGE My Youssef, Rabat

CPGE G.S. High Tech, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ
وَ المُؤمِنُون صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 6bis (08-09): *Sous espaces vectoriels*

30 novembre 2008

PROBLEME : **Mines sup 2001 commune deuxième problème**

Les parties B et C sont liées, mais la partie A est indépendante du reste du problème.

On rappelle que si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

PARTIE A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

1. Vérifier la relation
$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t)$$
2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est injective.
6. Dans cette question, $p = 3$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [illegible]

1. Montrer que $F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \ker(f - \mathrm{Id})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F, et un vecteur directeur v de G.
2. [illegible]

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre 2) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

4. Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

PARTIE C :

On reprend les notations de la partie B.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout réel t, on a

$$e^t = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right).$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.

2. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k$.
On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.
Expliciter sous forme de sommes ses coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, $c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t)$, $d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$
Expliciter la matrice $E(t)$.
Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre 2) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad E(t) = e^{2t}Q + e^tR$$

et expliciter Q et R.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question* **B.1)** ?

6. En déduire que

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \quad E(s)E(t) = E(s+t)$$

Que dire de $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $(E(t))^{-1}$?
L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

****

Fin
à la prochaine