CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Prépas G.S HighTech, Rabat

Corrigé DS3 (08-09) commun: *Équations différentielles Sous espaces vectoriels*

Lundi 01 Décembre 2008
Durée : 3heures

Preuves insolites :

• $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin x}{n} = 6$, **aprés avoir simplifié par** n

• **Montrer le théorème suivant :** ***Moins on en sait, plus on gagne.***

Preuve :

Postulat 1 : ***la connaissance, c'est le pouvoir.***

Postulat 2 : ***le temps, c'est de l'argent.***

Comme le sait tout ingénieur : ***Puissance = travail / temps*** **, et comme** ***connaissance = pouvoir*** **et** ***temps = argent*** **on a alors** ***connaissance = travail / argent.*** **On trouve :** ***Argent = travail / connaissance.*** **Ainsi, quand** ***la connaissance tends vers zéro, l'argent tends vers l'infini, quelque soit le travail effectué.***

Mathématicien du jour : ***Cantor***

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) est un mathématicien russo-allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés. Il prouva également que les nombres réels sont "plus nombreux" que les entiers naturels. Il définit les nombres cardinaux, les nombres ordinaux et leur arithmétique. Le travail de Cantor est d'un grand intérêt philosophique et a donné lieu à maintes interprétations et à maints débats. Cantor a été confronté à la résistance de la part des mathématiciens de son époque, en particulier Kronecker. Poincaré. Les dépressions récurrents de Cantor à la fin de sa vie, ont été parfois attribués à l'attitude hostile de certains de ses contemporains. Cantor prit sa retraite en 1913; il fut confronté à la pauvreté et souffrit même de la faim au cours de la Première Guerre mondiale.

PROBLÉME I.

Pr. Mamouni, Rabat, Maroc.

1) **Les calculs faits avec Maple© donnent :**

a) .

```
> dsolve(diff(y(t),t) - y(t) = exp(t)+t,y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = e^t\, t + t + 1 + e^t\, \_C1$$

b) .

```
> dsolve(diff(y(t),t) - 2*y(t) = -exp(t)+t,y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = e^t - \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{4} + e^{(2\,t)}\, \_C1$$

c) .

```
> dsolve(diff(y(t),t) + y(t) = t, y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = t - 1 + e^{(-t)}\ \_C1$$

2) a) La résolution de l'équation $AX = 0$ donne $x = y = z = 0$, donc rg$(A) = 3$, donc A est inversible. Vérifcation à l'aide de Maple©donne

```
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> A := matrix(3,3,[0,-1,0,-4,-3,6,-3,-3,5]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

3) a) Les calculs en Maple©donnent

```
> De := matrix(3,3, [1,0,0,0,2,0,0,0,-1]);P :=matrix(3,3, [1,-1,1,-1,2,1,0,1,1]);
```

$$De := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(De);inverse(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) On clacule $PDP^{-1} - A$ à l'aide de Maple©, on trouve :

```
> evalm(P&*De&*inverse(P)-A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $A = PDP^{-1}$ est inversible, en tant que produit de matrices iversibles, avec $A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Les calculs en Maple©donnent :

```
> evalm(P&*inverse(De)&*inverse(P));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

On vérifie à l'aide de Maple©

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\mathcal{S} \Longleftrightarrow AX = b$ **où** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **et** $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$**, comme** A **est inversible, donc** $X = A^{-1}b$**. Les calculs en Maple©donnent :**

```
> X:=evalm(inverse(A)&*b);
```

$$X := \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ 1 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

d) **Calculer pour tout** $n \in \mathbb{N}$, D^n **puis** A^n.

4) a) **De la relation** $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$**, on en déduit que** $\begin{cases} u(t) = -x(t) - 2y(t) + 3z(t) \\ v(t) = -x(t) - y(t) + 2z(t) \\ w(t) = x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$

b) **Donc** $u(t), v(t)$ **et** $w(t)$ **sont dérivables sur** $\mathbb{R}$**, en tant que somme de fonctions dérivables sur** $\mathbb{R}$**, avec** $\begin{cases} u'(t) = x'(t) - 2y'(t) + 3z'(t) \\ v'(t) = -x'(t) - y'(t) + 2z'(t) \\ w'(t) = x'(t) + y'(t) - z'(t) \end{cases}$ **,**

c) **L'écriture matricielle du système précédent est** $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

d) **L'écriture matricielle de** $\mathcal{S}(t)$ **est** $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$**, équivalente à** $P \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = (PDP^{-1})P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ **qui donne après multiplication par** P^{-1} **à gauche,** $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e) **L'équation matricielle précèdente donne le système différentiel suivant :** $\begin{cases} u' - u = \mathrm{e}^t + t \\ v' - 2v = -\mathrm{e}^t + t \\ w' + w = t \end{cases}$

déjà résolu dans la 1ère question, donc $\begin{cases} u(t) = t\mathrm{e}^t + t + 1 + a\mathrm{e}^t \\ v(t) = \mathrm{e}^t - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + b\mathrm{e}^{2t} \\ w(t) = t - 1 + c\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

f) **Les solutions de** $(\mathcal{S}(t))$ **sont obtenues à l'aide de la relation** $P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ **tout calcul fait avec Maple©on trouve :**

```
> Y:=matrix(3,1,[t*exp(t)+t+1+a*t,exp(t)-t/2-1/
> 4+b*exp(t),t-1+c*exp(t)]);
```

$$Y := \begin{bmatrix} t\,e^t + t + 1 + a\,t \\ e^t - \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4} + b\,e^t \\ t - 1 + c\,e^t \end{bmatrix}$$

```
> evalm(P&*Y);
```

$$\begin{bmatrix} t\,e^t + \frac{5}{2}\,t + \frac{1}{4} + a\,t - e^t - b\,e^t + c\,e^t \\ -t\,e^t - t - \frac{5}{2} - a\,t + 2\,e^t + 2\,b\,e^t + c\,e^t \\ -\frac{5}{4} + e^t + \frac{1}{2}\,t + b\,e^t + c\,e^t \end{bmatrix}$$

PROBLÉME II.

Pr. Mamouni, Rabat.

1) **a)** $\sin t$ **est concave sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**, car de dérivée seconde négative, donc sa courbe est comprise entre sa corde d'équation** $y = \frac{2}{\pi}t$ **et sa tangente d'équation** $y = t$**.**

b) **i. Sur** $\mathbb{R}_+^*$**, la solution est** $y(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{t}}$**, alors que sur** $\mathbb{R}_-^*$**, la solution est** $y(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{-t}}$

ii. Le raccordement des solutions en 0 n'est possible que si $\lambda = 0$**, donc la fonction nulle est l'unique solution de** (E') **sur** $\mathbb{R}$**.**

2) **a)** **évident.**

b) **évident.**

3) **a)** $k\pi$ **est l'unique solution constante**

b) y **est dérivable en 0, donc en prenant** $t = 0$ **dans l'équation on trouve** $\sin(y(0)) = 0$**, donc** $y(0) \in \pi\mathbb{Z}$**.**

c) **i.** $\sin(y(t) - k\pi) = \sin(y(t))$ **et** $(y(t) - k\pi)' = y'(t)$**, donc** $z(t) = y(t) - k\pi$ **est solution de** (E) **sur** $\mathbb{R}$ **et que** $z(t)$ **tend vers** 0 **lorsque** t **tend vers** 0**, car** $y(0) = k\pi$**.**

ii. Supposons que $\exists t_1 > 0$**, tel que** $z(t_1) < 0$**, d'après le theorème des valeurs intérmidiaires** $\exists t_2 0$ **tel que** $z(t_2) = 0$**, ainsi la solution** z **et la solution nulle se rencontrent au point** t_2**, c'est en contradiction avec le théorème de Cauchy.**
$\lim\limits_{0} z(t) = 0$**, en écrivant la définition pour** $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$**, on trouve que** $\exists \eta\, 0$ **tel que** $\forall t \in]0, \eta] \quad z(t) \leq \frac{\pi}{2}$

iii. On a $0 < z(t) < \dfrac{\pi}{2}$**, donc** $\frac{2}{\pi}z(t) \leq \sin(z(t))$**, d'où** $2tz'(t) + \frac{2}{\pi}z(t) \leq 2tz'(t) + \sin(z(t)) = 0$

iv. D'après la question précèdente on a : $2tz(t)\left(\dfrac{z'(t)}{z(t)} + \dfrac{1}{\pi t}\right) \leq 0$**, or** $t\, 0$ **et** $z(t)\, 0$**, d'où** $\dfrac{z'(t)}{z(t)} + \dfrac{1}{\pi t} = \left(\ln(z(t) + \dfrac{\ln t}{\pi}\right)' \leq 0$ **sur** $]0, \eta]$**. Ainsi la fonction** $u(t) = \ln(z(t)) + \dfrac{\ln t}{\pi} = \ln\left(z(t)t^{\frac{1}{\pi}}\right.$ **est décroissante, d'où** $\ln\left(z(t)t^{\frac{1}{\pi}}\right) \geq u(\eta)$**, d'où** $z(t)t^{\frac{1}{\pi}} \geq C = \mathrm{e}^{u(\eta)}$**, donc** $\forall t \in]0, \eta] \quad z(t) \geq C\frac{1}{t^{\frac{1}{\pi}}}$ **et par suite** $\lim\limits_{0} z(t) = +\infty$**.**

v. Il y a trois autres cas possibles :
- **si** $t_0 > 0$ **et** $z(t_0) < 0$**, on utilise la solution** $-z(t)$**.**
- **si** $t_0 < 0$ **et** $z(t_0) < 0$**, on utilise la solution** $-z(-t)$**.**
- **si** $t_0 < 0$ **et** $z(t_0)\, 0$**, on utilise la solution** $z(-t)$**.**

d) **i. Le raisonnement est pareil que celui effectué dans c) avec les modifications suivantes :**
Dans iii) utiliser le fait que $\sin(z(t)) \leq t$ **et que** z **est solution.**
Dans iv), on a $\dfrac{z(t)}{t} \geq \dfrac{C}{\sqrt{t}} \longrightarrow +\infty$ **quand** $t \longrightarrow 0$**, c'est en contradiction avec le fait que** z **est dérivable en 0, puisque solution sur** $\mathbb{R}$**.**

e) **Les fonctions constantes** $t \mapsto k\pi$ **sont les seules solutions sur** $\mathbb{R}$**.**

Fin
à la prochaine