DS COMMUN : *Espaces vectoriels Polynômes*

MPSI 1, 2 et 4
CPGE Med V

Casablanca
2006-2007

Mercredi 28 Février 2007.

Durée: 4 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Problème I. Polynômes d'interpolation de Lagrange. Polynômes de Bernstein.

Notation et vocabulaire.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts, on pose $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$, appelés polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \dots, a_n$.
- Dans tout le problème, $l^\infty([0,1], \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des fonctions definies de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, bornées.
- On pose :

$$P_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$
$$P_{0,0} = 1$$

- pour tout $f \in l^\infty([0,1], \mathbb{R})$, les polynômes de Bernstein associés sont définies par les relations suivantes :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$
$$B_0(f) = 1$$

- Pour tout $f \in l^\infty([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
- On dira qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, quand $\lim_{n\longrightarrow+\infty} ||f_n - f|| = 0$.
- On rappelle qu'une fonction f est dite continue uniformément sur $[0,1]$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \text{ on a : } \\ |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

- Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$

Partie I.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Calculer $L_k(a_j)$ pour $0 \leq j,k \leq n$.

2) En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

4) En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base $\mathbb{R}_n[X]$.

5) En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P(a_k) = f(a_k), \forall k \in [|0,n|]$.
On dit que P interpole f aux points $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

6) En déduire que l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P(X) & \longmapsto & (P(a_0),\ldots,P(a_n)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie II.

1) Montrer que $(l^\infty([0,1],\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Montrer que la famille $(P_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.
On admettra dans la suite qu'elle en génératrice, donc base.

3) Exprimer $(X^n(1-X)^n)^{(n)}$ dans cette base.

4) En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$.

5) Montrer que $B_n : \begin{array}{ccc} l^\infty([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ f & \longmapsto & B_n(f) \end{array}$ est linéaire.

6) a) Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = 1$.

b) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 P_{n,k} = nX(1-X)$.

c) Établir la formule suivante :

$$B_n(Xf) = \frac{1}{n}X(1-X)\left(B_n(f)\right)' + XB_n(f)$$

7) a) Montrer que pour tout $m \leq n$, $B_n(X^m)$ est un polynôme de degré m.

b) En déduire que B_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III.

1) Soit $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1[$.

On pose : $K_n = \left\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 0 \leq k \leq n \text{ et } \alpha < \left|\frac{k}{n} - x\right|\right\}$.

Montrer que : $\sum_{k\in K_n} P_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

On pourra d'abord remarquer que $\max_{t\in[0,1]} t - t^2 = \frac{1}{4}$.

2) a) On suppose f continue en un point $x_0 \in [0,1]$, montrer alors que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} B_n(f)(x_0) = f(x_0)$.

b) On suppose f continue sur $[0,1]$, montrer alors que $B_n(f)$ converge uniformément vers f dans l'intervalle $[0,1]$.

Partie IV.

1) Montrer que l'application Δ est linéaire.

2) Préciser le noyau de sa réstriction, Δ_n définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Montrer que $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$, pour tout polynôme P non constant.

4) En déduire que $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On pourra d'abord montrer que X^k admet un antécédant dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [|0, n-1|]$.

5) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que :

a) $\Delta^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(x+n-k)$.
Où $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{\text{n fois}}$ et la convention $\Delta^0(f) = f$.

b) $B_n(f)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^k(g)(0)$
Où g est la fonction définié par $g(x) = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Problème II. Crochet de Lie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous éléments f et g de $\mathcal{L}(E)$, on pose $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.

a) Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que : $f(x) = \lambda_x . x$.

b) Montrer que $\forall (x,y) \in E \setminus \{0_E\} \times E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$
On pourra étudier les cas : $\{x, y\}$ libre et $\{x, y\}$ liée.

c) En déduire que f est une homothétie de E.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $[f,g] = 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que f n'est pas une homothétie.

a) justifier l'existence d'un élément $x \in E$ tel que : $(x, f(x)$ soit libre.

b) Soit $F = Vect\{x\}$ et H un supplémentaire de F contenant $f(x)$, dont on admettra l'existence, et g la symétrie par rapport à F parallélement à G.
Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$, puis en déduire une contradiction.

c) Conclure.

Partie II.

Dans toute cette partie on se donne $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $[f,g] = \alpha f + \beta g$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $[f^n, g] = \alpha n f^n$.
On rappelle que $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}$ avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

b) On suppose que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$, montrer alors que la famille $(\mathrm{id}_E, \ldots, f^n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

2) Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts, et $\alpha \notin \{0,1\}$.

a) Montrer que $2\alpha(g \circ f) + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$, puis que $g \circ f = f$.

c) On suppose $f \neq 0$, montrer que $\alpha = -1, \beta = 1$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

d) Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et $q \circ p = p$, alors $[p,q] = -p + q$.

3) Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts avec $f \neq 0$, et $\alpha \notin \{0, -1\}$.

a) Montrer que $\ker g \subset \ker f$, $f \circ g = f$.

b) Montrer que $\alpha + \beta = 0, \alpha = 1$.

c) En déduire que $\ker g = \ker f$.

d) Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\ker p \subset \ker q$ et $p \circ q = p$, alors $[p,q] = p - q$.

Fin.