.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَلِ المُتَوَكِلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 5 (07-08) : *Espaces vectoriels Polynômes*

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1) **a)** **deg**$P_n = 2n$**.**

b) $P_n^{(k)} = 0$ **pour tout** $k \leq 2n+1$**, car la dérivée d'un polynôme est nulle quand celle ci dépasse le degré.**

2) **a)** $P_n(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \dfrac{(-b)^n x^n (x-\frac{a}{b})^n}{n!}$**, donc les racines de** P_n **sont** 0 **et** $\dfrac{a}{b}$ **chacune de multiplicité** n**.**

b) $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ **puisque** 0 **et** $\dfrac{a}{b}$ **sont des racines de** P_n **chacune de multiplicité** n**.**

3) **a)**

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)}(x) &= \frac{(-b)^n}{n!}(x^n(x-\tfrac{a}{b})^n)^{(k)} \\
&= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_k^p (x^n)^{(p)}((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)}
\end{aligned}$$

(d'après la formule de Leibniz)

$$= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p (x^n)^{(p)}((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)}$$

(**car** $(x^n)^{(p)}$ **si** $p > n$ **et** $((x-\frac{a}{b})^n)^{(k-p)} = 0$ **si** $k-p > n$)

$$= \frac{(-b)^n}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\frac{n!}{(n-k+p)!}(x-\frac{a}{b})^{n-k+p}$$

(**car** $(x^n)^{(p)} = A_n^p x^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$)

$$= \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}.\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}$$

b) En utilisant la question précédente et la convention $0^0 = 1$ on en déduit que :
$$P_0^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}C_k^n\frac{n!}{0!}.\frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n}a^{2n-k} = C_k^n\frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n}a^{2n-k}$$
De même
$$P_0^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n!}C_k^{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}.\frac{n!}{0!}(-b)^n\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} = (-1)^nC_k^{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}b^{k-n}a^{2n-k}$$

c) Découle des forumles précédentes et du fait que $(2n-k)!$ divise $n!$ car $2n-k \leq n$.

Deuxième partie

1) a)
$$P_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1}(a-bx)^n - bx^n(a-bx)^{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(a-bx)^{n-1}(a-2bx)$$
donc P_n croissante sur $\left[0, \frac{a}{2b}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{a}{2b}, \frac{a}{b}\right]$.

b) D'aprés la question précédente, P_n atteint son minimum sur $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ en 0 et $\frac{a}{b}$, avec $P_n(0) = P_n(\frac{a}{b}) = 0$ donc $P_n \geq 0$ et atteint son maximum et $\frac{a}{2b}$ donc bornée avec $\beta_n = \sup P_n = P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$.

2) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a : $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, en multipliant ces inégalités deux à deux entre n_0 et $n-1$ on obtient $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}u_{n_0} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $\beta_n = \frac{\alpha^n}{n!} \longrightarrow 0$ **avec** $\alpha = \frac{a^2}{4b}$.

3) Soit (x_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui converge vers 0, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|x_n| < \frac{1}{4}$, donc $-\frac{1}{4} < x_n < \frac{1}{4}$, ainsi à partir du rang N on a aussi $-\frac{1}{4} < x_m < \frac{1}{4}$, en "sommant" ces inégalités on obtient $-\frac{1}{2} < x_n - x_m < \frac{1}{2}$, avec $x_n - x_m \in \mathbb{Z}$ donc nul, donc la suite est stationnaire à partir d'un certain rang, or elle converge vers 0, donc nulle à partir de ce rang.

Troisième partie

1) **D'aprés la question Partie II, 1,b) on a** $0 \leq Q_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$ **sur** $[0,\pi]$ **car** $\pi = \dfrac{c}{d}$**, or** $0 \leq \sin x \leq 1$ **sur** $[0,\pi]$**, donc** $0 \leq Q_n(x)\sin x \leq \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$ **sur** $[0,\pi]$ **et par suite** $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$ **sur** $[0,\pi]$**. Enfin on conclut que** $I_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$**, d'aprés la question Partie II, 2,b)**

2) **La fonction** $x \mapsto Q_n(x)\sin x$ **est continue positive sur** $[0,\pi]$ **et non nulle donc son intégrale est aussi non nulle.**

3) $$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x)(\cos(x+\pi))'dx \\ &= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} - \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n'(x)\cos(x+\pi)dx \\ &= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} + \int_0^{\frac{c}{d}} Q_n'(x)(\cos(x+\frac{\pi}{2}+\pi))'dx \\ &= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^{\pi} + \left[Q''_n(x)\cos(x+\tfrac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\frac{c}{d}} Q''_n(x)(\cos(x+2\frac{\pi}{2}+\pi))'dx \end{aligned}$$

Et ainsi de suite jusqu'avoir $I_n = \sum_{k\geq 0}\left[Q_n^{(k)}(x)\cos(x+k\dfrac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi} = \sum_{k=n}^{2n}\left[Q_n^{(k)}(x)\cos(x+k\dfrac{\pi}{2}+\pi)\right]_0^{\pi}$ **car** $Q_n^{(k)}(x) = 0$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \dfrac{c}{d}$ **avec** $k \leq n-1$ **ou** $k \geq 2n+1$**, voir Partie I.**

4) **D'aprés Partie I, 3,c** $Q_n^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \dfrac{c}{d}$**, d'autre part** $\cos(x+k\frac{\pi}{2}+\pi) \in \{-1,0,1\}$ **pour** $x = 0$ **ou** $x = \dfrac{c}{d} = \pi$**, donc** $I_n \in \mathbb{N}$**.**

5) $I_n \in \mathbb{N}$ **et** $I_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$**, donc** $I_n = 0$ **à partir d'un certain rang, contradiction avec la quastion 2.**

Exercice 2 :

1) **L'application nulle est continue, si** f **et** g **sont continue alors** $f+\lambda g$ **aussi, donc** E **sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$**. De même l'application nulle vérifie les propriètés de éléments de** F **et si** f,g **vérifient de pareils propriétés il en est de même pour** $f+\lambda g$**, donc** F **sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$**.**

2) $g = \Phi_f$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$**, en tant que primitive d'une fonction continue.** $g(0) = 0$**,** $g'(x) = xf(x)$ **donc** $g'(0) = 0$ **avec** $\lim\limits_0 \dfrac{g'(x)}{x} = f(0)$ **donc** g' **est dérivable en 0, conclusion** $g = \Phi_f \in F$**. Il est clair que** $\Phi(f+\lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$**.**

3) **Il suffit de montrer que** f **est continue en** 0**, en effet** $\lim\limits_0 f(x) = \lim\limits_0 \dfrac{g'(x)}{x} = g''(0) = f(0)$**. On a** $g'(x) = xf(x)$ **avec** $g(0) = 0$**, d'où** $g(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt = \Phi_f(x)$**, donc** $g = \Phi(f)$**, d'où** Φ **est surjective.**

4) **Il reste à montrer que** Φ **est surjective, en effet :** $f \in \ker\Phi \Longrightarrow \displaystyle\int_0^x tf(t)dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow xf(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **par continuité de** f **en** 0**.**

Exercice 2 :

1) **Vérifier rapidement que** $\Psi(f+\lambda g)=\Psi(f)+\lambda\Psi(g)$.
2) **L'application nulle vérifie l'équation et si** f,g **la vérifient il en est de même pour** $f+\lambda g$.
3) $\Phi_b f(x)=xf'(x)-bf(x)$, **donc** $\Psi f(x)=\Phi_a\circ\Phi_b f(x)=x(xf'(x)-bf(x))'-a(xf'(x)-bf(x))=x^2f''(x)+(1-a-b)xf'(x)+abf(x)=0$, **donc** $S=\ker\Psi$, **est un sous espace vectoriel en tant que noyau d'une application linéaire.**
4) a) **Reprendre les mêmes calculs faits dans la question précédente.**
   b) $\Phi_a-\Phi_b=(b-a)id$.
   c) $y\in S=\ker\Phi_a\circ\Phi_b\Longrightarrow\Phi_a\circ\Phi_b(y)=0\Longrightarrow\Phi_b(y)\in\ker\Phi_a$, **de même puisque** $\Phi_a\circ\Phi_b=\Phi_b\circ\Phi_a$ **donc** $\Phi_a(y)\in\ker\Phi_b$.
   d) $y\in\ker\Phi_a\cap\ker\Phi_b\Longrightarrow\Phi_a(y)=0,\Phi_b(y)=0\Longrightarrow\Phi(y)=ay=by\Longrightarrow(a-b)y=0\Longrightarrow y=0$ **car** $a\neq b$.
   $y\in S\Longrightarrow\Phi_b(y)\in\ker\Phi_a,\Phi_a(y)\in\ker\Phi_b$ **or** $\Phi_a-\Phi_b=(b-a)id$, **donc** $y=\dfrac{1}{b-a}\Phi_a(y)+\dfrac{1}{a-b}\Phi_b(y)\in\ker\Phi_a\oplus\ker\Phi_b$, **d'où** $E\subset\ker\Phi_a\oplus\ker\Phi_b$, **l'autre inclusion est évidente.**
5) **Les solutions** y **de (1) s'écrivent de la forme** $y=y_1+y_2$ **avec** $y_1\in\ker\Phi_a,y_2\in\ker\Phi_b$, **donc** $xy_1'(x)=ay_1(x)$, **d'où** $y_1(x)=|x|^a$, **de même** $y_2(x)=|x|^b$.
6) **Les solutions se prolongent en 0** ***si et seulement si*** **leurs limites en 0 sont égales et finies** ***si et seulement si*** $a>0$ **et** $b>0$. **La même condition est suffisante pour avoir une solution non nulle.**

$\boxed{\mathcal{F}in}$