(5 pts) **Exercice** 2: On considère les ensembles suivants

$$E = C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$$

$$F = \{g \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid g(0) = g'(0) = 0 \text{ et } g' \text{ dérivable en } 0\}$$

ainsi que l'application

$$\Phi : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto \Phi_f : x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt \,.$$

0,5+0,5 1. Montrer que E et F sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

0,5+0,5 2. Vérifier que $\Phi_f \in F$ et que Φ est linéaire.

1 + 1 3. Soit $g \in F$. On définit f par $f(x) = g'(x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = g''(0)$. Montrer que $f \in E$ et en déduire que Φ est surjective.

1 4. Montrer que Φ est un isomorphisme.

(8 pts) **Exercice** 3: Soit $E_k = \mathcal{D}^k(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions k fois dérivables sur $\mathbf{R}$. Soit $F = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

On note $\Phi : E_k \to E_{k-1}$ l'application définie par $\Phi(f) : x \mapsto xf'(x)$. On désigne aussi par Φ_a et Φ_b respectivement les applications $\Phi_a = \Phi - a\,\mathrm{Id}$ et $\Phi_b = \Phi - b\,\mathrm{Id}$.

Soit $\Psi : E_2 \to F$ donnée par $\Psi = \Phi_a \circ \Phi_b$.

0,5 1. Montrer que Ψ est linéaire.

0,5 2. Soit S le sous-ensemble de E_2 formé des fonctions vérifiant l'équation

$$x^2 f''(x) + (1-a-b)xf'(x) + abf(x) = 0. \qquad (1)$$

Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E_2.

1+0,5 3. Montrer que $S = \mathrm{Ker}\,\Psi$. En déduire une nouvelle démonstration de la question précédente.

0,5 4. (a) Justifier $\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_b \circ \Phi_a$.

0,5 (b) Exprimer $\Phi_a - \Phi_b$ en fonction de Id_{E_2}, de a et de b.

0,5 (c) Montrer que si $y \in S$, alors $\Phi_a(y) \in \mathrm{Ker}\,\Phi_b$ et $\Phi_b(y) \in \mathrm{Ker}\,\Phi_a$.

1+0,5 (d) Montrer que $S = \mathrm{Ker}\,\Phi_a \oplus \mathrm{Ker}\,\Phi_b$.

1 5. En déduire les solutions de (1) sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.

1 + 0,5 6. A quelles conditions sur a et b les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ se prolongent-elles en une solution définie sur tout $\mathbf{R}$? A quelles conditions existe-t-il une solution non-nulle ?

Fin