

Lundi 19 Mars 2007

Durée: 4 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n, 2/n, ..., n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

PROBLÈME I. Puissances itérées d'un endomorphismes.

Vocabulaire et notations.

- Dans tout le chapitre, E désigne un \mathbb{R} -ev, de dimension finie égale à n ,

et f un endomorphisme de E .

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \text{id}_E$.

- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^r a_k X^k$, on pose $P(f) = \sum_{k=0}^r a_k f^k$.

Par exemple, si $P(X) = X^2 + 2X - 3$, alors $P(f) = f^2 + 2f - 3 \text{id}_E$.

- f est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de nilpotence de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$.
- On dit que f est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que :
 - $f^p(x) = x$.
 - la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ engendre E .
 - Les $(f^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ sont deux à deux distincts.
- Si F est un sev de E , $f|_F$ désigne la restriction de f à F . Ainsi $f|_F$ est une application linéaire de F vers E .

Partie I : Étude d'un exemple.

On suppose dans cette partie que $f^2 = 3f - 2 \text{id}_E$.

- 1) Montrer que $\text{Vect}(\text{id}_E, f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

- 2) Montrer que $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2 \text{id}_E)$.
- 3) Justifier l'existence de $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tel que : $f^k = a_k f + b_k \text{id}_E, \forall k \in \mathbb{N}$.
Donner une relation de récurrence entre a_{k+1}, a_k et a_{k-1} .
- 4) Exprimer a_k et b_k en fonction de k .
- 5) Montrer que f est inversible et écrire f^{-1} en fonction de f et id_E .
Cette écriture coïncide avec celle de la question 3).
- 6) Peut-on généraliser l'écriture de la question 3) pour $k \in \mathbb{Z}$

Partie II : Noyaux et images itérés.

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que $f(\ker(f^{k+1})) \subset \ker(f^k)$.
- 2) Montrer que $\ker f_F = \ker f \cap F$ et $\text{Im } f|_F = f(F)$.
Écrire alors la formule du rang pour $f|_F$
- 3) En déduire que $\dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + \dim \ker f, \forall k \in \mathbb{N}$.
On pourra prendre $F = \ker(f^{k+1})$.
- 4) Montrer que la suite $(\ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion) et que la suite $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 5) Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que :
 - a) $\ker f^k = \ker f^{k+1} \implies \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$
 - b) $\text{Im } f^{k+1} = \text{Im } f^{k+2} \implies \text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$
- 6) Justifier l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\ker(f^p) = \ker_{p+1}$.
Montrer que $\ker(f^k) = \ker(f^p), \forall k \geq p$.
- 7) Montrer que les suites $(\ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang p .
- 8) Montrer que $\ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$.
- 9) Montrer que la suite $(\dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k)))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Indication : Prendre G un supplémentaire de $\text{Im } f^{k+1}$ dans $\text{Im } f^k$ et montrer que $\text{Im } f^{k+1} = \text{Im } f^{k+2} + f(G)$

Partie III : Endomorphisme nilpotent.

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p , donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

- 1) Soit $x \in E \setminus \text{Ker } f^{p-1}$.
Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- 2) En déduire que si E est de dimension finie n , alors $f^n = 0$.
- 3) Montrer que $\text{rg}(f) \leq n - 1$.
- 4) On suppose dans cette question que $\text{rg}(f) = n - 1$.
 - a) Montrer que $\dim \ker f^k = k, \forall k \in \{0, \dots, n\}$.
 - b) En déduire que $\ker f^k = \text{Im } f^{n-k}, \forall k \in \{0, \dots, n\}$.
- 5) On définit l'application suivante $\Phi_f : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$.
 $g \longmapsto [f, g] = fg - gf$

Avec $fg = f \circ g$.

- a) Montrer que Φ_f est une application linéaire, préciser son noyau, qu'on notera dans la suite $\mathcal{C}(f)$.
- b) Donner, sans le justifier, une condition suffisante et nécessaire pour que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.
- c) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
 - i. Montrer que fg est nilpotent.
 - ii. Montrer que $\text{id}_E - f$ est bijective.
 - iii. Montrer que $f + g$ est bijective.
- 6) On suppose dans cette question que $p = n - 1$.
 - a) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n - 2\}$, on a :
 - i. $\dim(\ker f^k) \geq k$.
On pourra raisonner par récurrence.
 - ii. $\dim(\ker f^k) \leq k + 1$.
On pourra raisonner par récurrence descendante.
 - b) On suppose que $\exists k \in \{1, \dots, n - 2\}$ tel que : $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k + 2$.
 - i. Montrer que $\dim(\ker f^k) \geq \dim(\ker f^{k-1}) + 2$.
On pourra utiliser $f|_F$ ou F supplémentaire de $\ker f^k$ dans $\ker f^{k+1}$

- ii. En déduire une contradiction.
 - c) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n-2\}$, $\dim(\ker f^k) = k+1$.
 - d) On suppose que $\ker f \subset \text{Im } f$, en utilisant $f|_{\text{Im } f}$, trouver une contradiction, puis conclure.
- 7) On suppose dans cette question que $p = n$.
- a) Justifier l'existence d'un $x \in E$ tel que : $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit base de E .
 - b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
 - i. Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $g(x) = P(f)(x)$.
 - ii. En déduire que $g(f^k(x)) = P(f)(f^k(x)), \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$.
 - iii. En déduire que $g = P(f)$.
 - iv. Montrer que la famille $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
 - v. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(id_E, f, \dots, f^{n-1})$, puis que : $\dim \mathcal{C}(f) = n$.
- 8) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

- a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\Phi_f)^k(g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f^{k-i} g f^i$.
- b) En déduire $(\Phi_f)^{2p}(g) = 0$.

c) Conclure.

Partie IV : Endomorphisme cyclique.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant la définition dans le vocabulaire et notations.

- 1) Montrer que $f^p(f^k(x)) = f^k(x), \forall k \in \{0, \dots, p-1\}$.
- 2) En déduire que $f^p = id_E$, puis que f est inversible et préciser son inverse.
- 3) Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(id_E + f \dots f^{p-1})$.
- 4) Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
Indication : Considérer m maximal tel que $\mathcal{F} = (x, \dots, f^{p-1}(m))$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de \mathcal{F} pour tout entier k .
- 5) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
 - a) Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $g(x) = P(f)(x)$.
 - b) En déduire que $g(f^k(x)) = P(f)(f^k(x)), \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$.
 - c) En déduire que $g = P(f)$.
 - d) Montrer que la famille $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
 - e) En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(id_E, f, \dots, f^{n-1})$, puis que : $\dim \mathcal{C}(f) = n$.