DS BLANC : *Espaces vectoriels*

MPSI 2 et 4 **Casablanca**
CPGE Med V **2006-2007**

Lundi 19 Mars 2007

Durée: 4 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

PROBLÉME I. Puissances itérées d'un endomorphismes.

Vocabulaire et notations.

- Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev, de dimension finie égale à n, et f un endomorphisme de E.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, on pose $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k$.

  Par exemple, si $P(X) = X^2 + 2X - 3$, alors $P(f) = f^2 + 2f - 3\,\mathrm{id}_E$.
- f est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de nilpotence de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$.
- On dit que f est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que :
  - $f^p(x) = x$.
  - la famille $\left(f^k(x)\right)_{0 \le k \le p-1}$ engendre E.
  - Les $\left(f^k(x)\right)_{0 \le k \le p-1}$ sont deux à deux distincts.
- Si F est un sev de E, $f_{|F}$ désigne la restriction de f à F. Ainsi $f_{|F}$ est une application linéaire de F vers E.

Partie I : Étude d'un exemple.

On suppose dans cette partie que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

3) Justifier l'existence de $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tel que : $f^k = a_k f + b_k\,\mathrm{id}_E, \forall k \in \mathbb{N}$.
Donner une relation de récurrence entre a_{k+1}, a_k et a_{k-1}.

4) Exprimer a_k et b_k en fonction de k.

5) Montrer que f est inversible et écrire f^{-1} en fonction de f et id_E.
Cette écriture coincide avec celle de la question 3).

6) Peut-on généraliser l'écriture de la question 3) pour $k \in \mathbb{Z}$

Partie II : Noyaux et images itérés.

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $f(\ker(f^{k+1})) \subset \ker(f^k)$.

2) Montrer que $\ker f_F = \ker f \cap F$ et $\mathrm{Im}_{|F} = f(F)$.
Écrire alors la formule du rang pour $f_{|F}$

3) En déduire que $\dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f, \forall k \in \mathbb{N}$.
On pourra prendre prendre $F = \ker(f^{k+1})$.

4) Montrer que la suite $\left(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion) et que la suite $\left(\mathrm{Im}\,(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5) Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

a) $\ker f^k = \ker f^{k+1} \Longrightarrow \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$

b) $\mathrm{Im}\, f^{k+1} = \mathrm{Im}\, f^{k+2} \Longrightarrow \mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$

6) Justifier l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\ker(f^p) = \ker_{p+1}$.
Montrer que $\ker(f^k) = \ker(f^p), \forall k \geq p$.

7) Montrer que les suites $\left(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\,(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang p.

8) Montrer que $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p) = E$.

9) Montrer que la suite $\left(\dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Indication : Prendre G un suplémentaire de $\mathrm{Im}\, f^{k+1}$ dans $\mathrm{Im}\, f^k$ et montrer que $\mathrm{Im}\, f^{k+1} = \mathrm{Im}\, f^{k+2} + f(G)$

Partie III : Endomorphisme nilpotent.

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p, donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1) Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}\, f^{p-1}$.
Montrer que la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.

2) En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

3) Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq n - 1$.

4) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(f) = n - 1$.

a) Montrer que $\dim\ker f^k = k, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$.

b) En déduire que $\ker f^k = \mathrm{Im}\, f^{n-k}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$.

5) On définit l'application suivante $\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & [f,g] = fg - gf \end{array}$.

Avec $fg = f \circ g$.

a) Montrer que Φ_f est une application linéaire, préciser son noyau, qu'on notera dans le suite $\mathcal{C}(f)$.

b) Donner, sans le justifier, une condition suffisante et nécessaire pour que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

c) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

i. Montrer que fg est nilpotent.

ii. Montrer que $\mathrm{id}_E - f$ est bijective.

iii. Montrer que $f + g$ est bijective.

6) On suppose dans cette question que $p = n - 1$.

a) Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n-2\}$, on a :

i. $\dim(\ker f^k) \geq k$.
On pourra raisonner par récurrence.

ii. $\dim(\ker f^k) \leq k + 1$.
On pourra raisonner par récurrence descendante.

b) On suppose que $\exists k \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que : $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k + 2$.

i. Montrer que $\dim(\ker f^k) \geq \dim(\ker f^{k-1}) + 2$.
On pourra utiliser $f_{|F}$ ou F supplémentaire de $\ker f^k$ dans $\ker f^{k+1}$

ii. En déduire une contradiction.

c) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n-2\}, \quad \dim(\ker f^k) = k+1$.

d) On suppose que $\ker f \subset \operatorname{Im} f$, en utilisant $f_{|\operatorname{Im} f}$, trouver une contradiction, puis conclure.

7) On suppose dans cette question que $p = n$.

a) Justifier l'existence d'un $x \in E$ tel que : $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit base de E.

b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

i. Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $g(x) = P(f)(x)$.

ii. En déduire que $g(f^k(x)) = P(f)(f^k(x)), \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$.

iii. En déduire que $g = P(f)$.

iv. Montrer que la famille $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

v. En déduire que $\mathcal{C}(f) = Vect(id_E, f, \dots, f^{n-1})$, puis que : $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

8) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\Phi_f)^k(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} f^{k-i} g f^i$.

b) En déduire $(\Phi_f)^{2p}(g) = 0$.

c) Conclure.

Partie IV : Endomorphisme cyclique.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant la définition dans le vocabulaire et notations.

1) Montrer que $f^p(f^k(x)) = f^k(x), \forall k \in \{0, \dots, p-1\}$.

2) En déduire que $f^p = \mathrm{id}_E$, puis que f est inversible et préciser son inverse.

3) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(\mathrm{id}_E + f \dots f^{p-1})$.

4) Montrer que $\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

Indication : Considérer m maximal tel que $\mathcal{F} = \big(x, \dots, f^{p-1}(m)\big)$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier k.

5) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

a) Montrer que $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $g(x) = P(f)(x)$.

b) En déduire que $g(f^k(x)) = P(f)(f^k(x)), \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$.

c) En déduire que $g = P(f)$.

d) Montrer que la famille $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

e) En déduire que $\mathcal{C}(f) = Vect(id_E, f, \dots, f^{n-1})$, puis que : $\dim \mathcal{C}(f) = n$.