DS 7 Blanc : 2004–2005 : Algèbre linéaire
Corrigé

1. (a) En calculant le polynôme caractéristique de A on trouve
$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(1+X)^3$ donc -1 qui son unique racine sera l'unique valeur propre de f.
   (b) (x, y, z) valeur propre de f associée à la valeur propre $-1 \Leftrightarrow AX = -X$ où
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui donne trois équations toutes proportionnelles à l'équation
$-x + 5y + 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de l'espace donc de dimension 2.
   (c) Non parceque la multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caracéristique est 3, alors que la dimension de l'espace propre associée est 2, qui ne sont pas égaux.
   (d) i. $u_2 = f(e_1) + e_1 = (-2, -1, 2) + (1, 0, 0) = (-1, -1, 2)$ vérifie bien l'équation : $-x + 5y + 2z = 0$, de même $u_3 = (2, 0, 1)$ vérifie aussi la même équation donc tous les deux vecteurs propres associés à la valeur propre -1, c'est à dire éléments de $\mathrm{Ker}(f + id_E)$.
   ii. $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pour montrer donc que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit alors de montrer qu'elle est libre, et pour cela il suffit de montrer que son deteminant dans la base canonique est non nul, en effet $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$.

2. (a) On a $(f + id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = u_2 \implies f(u_1) = -u_1 + u_2$, d'autre part $f(u_2) = -u_2$, $f(u_3) = -u_3$
, donc la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$ sera $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (b) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule P^{-1} à l'aide de la formule de la comatrice, par exemple
on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $A = PBP^{-1}$, c'est un résultat de cours.

3. (a) On a : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $J^2 = 0$

(b) On $BI = IB$, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :
$B^k = (J-I)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p J^p (-1)^{k-p}$, or $J^2 = 0$ donc $J^p = 0 \quad \forall p \geq 2$, donc dans la somme il ne resterait que les indices $p = 0, p = 1$, d'où $B^k = (-1)^k I + C_k^1 (-1)^{k-1} J = (-1)^k (I - kJ)$.

(c) $A = PBP^{-1} \implies \forall k \in \mathbb{N}^* : \quad A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k P(I - kJ)P^{-1} = (-1)^k (I - kPJP^{-1}$.

4. (a) L'écriture matricielle du système est $Y = AX$ où

$$X = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi X, Y sont les coordonnées repectifs de $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans cette même base, cette écriture matricielle devient alors $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$

(b) On a $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$, aprés dérivation on obtient $\varphi'(t) = x'(t)u_1 + y'(t)u_2 + z'(t)u_3$, ainsi les coordonnés respectifs de $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ sont

$$X_1 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

La relation $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ s'écrit alors matriciellement dans la base $\mathcal{B}_1$: $\quad Y_1 = BX_1$, ce qui donne exactement le système $(\mathcal{S}')$.

FIN DU CORRIGÉ
A LA PROCHAINE