Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myismail

CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1) $$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A-\lambda I_3 \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A-\lambda I_3)=0 \\ &\iff (2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)=0 \\ &\iff (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)=0 \\ &\iff \lambda \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$
Ainsi le polynôme caractéristique de a admet 3 racines distinctes, donc A diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i id_{\mathbb{R}^3})=1$ pour tout λ_i.

2) $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, resolvons les systèmes $AX=\lambda_i X$ pour trouver les e_i, où $X=\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$.
$AX=X \Longrightarrow x+1+z=0$ et $z=0 \Longrightarrow x=-1, y=1, z=0$.
$AX=2X \Longrightarrow 1+z=0$ et $x+z=0 \Longrightarrow x=1, y=1, z=-1$.
$$\begin{aligned} AX=3X &\Longrightarrow -x+1+z=0, x-1+z=0, \text{ et } -z=0 \\ &\Longrightarrow x=1, y=1, z=0 \end{aligned}.$$

Posons $\mathcal{B}_2=\left(e_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

3) Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle libre, pour cela il suffit de montrer que $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\neq 0$, où $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
En effet $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

D'autre part $u(e_i)=\lambda_i e_i$, donc $\Delta=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre A et Δ :
$$A=P\Delta P^{-1} \qquad \text{avec : } P=P_{\mathcal{B}_1\longrightarrow\mathcal{B}_2}$$

4) a) $B=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v)$, donc $B^2=((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v))^2=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v^2)=A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$, d'où $v^2=u$, et de même, on a : $BA=B^3=AB$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(uv)=$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(vu)$, d'où $uv = vu$.

b) $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda v(e_i)$, d'où $v(e_i) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$ or $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3}) = 1$ et $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$, d'où e_i et $v(e_i)$ sont proportionnels. Donc $v(i) = \alpha_i e(i)$ et par suite : $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre B et V :

$$B = P\Delta P^{-1}$$

Or $B^2 = A$, d'où $(PVP^{-1})^2 = PV^2P^{-1} = P\Delta P^{-1}$, d'où $V^2 = \Delta$, donc $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 2, \alpha_3^2 = 3$, et donc :

$$\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

5) Les solutions de l'équations $X^2 = A$ sont de la forme $X = PVP^{-1}$, il y en a 8 solutions car on peut former 8 matrices, $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ avec les conditions : $\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

EXERCICE 2.

1) a) $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^k = 0\}$, donc $u^{p-1} \neq 0$, et par suite $\exists x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tel que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose par u^{p-1} et comme $u^k = 0, \quad \forall k \geq p$, alors $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, or $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, ce qui donne $\lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose cette fois par u^{p-2}, ce qui donne $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ et on ré-itère le même procédè jusqu'à montrer que tous les λ_i sont nuls. D'où la famille $\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

c) $\mathcal{C}$ est libre, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = p \leq \dim(E) = n$, or $u^p = 0$ et $n \geq p$, d'où $u^n = 0$.

2) a) $v^{2p} = (v^2)^p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$.
Posons : $q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } v^k = 0\}$, donc $2(p-1) < q \leq 2p$, et comme dans ce qui précède pour u, on peut aussi affirmer pour v que $q \leq n$, ainsi $2(p-1) + 1 \leq q \leq n$, d'où $2p - 1 \leq n$, d'où $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

b) Soit $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ et $M = 0$, donc $p = 2$, pour $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, d'où suivant la question précédente si $X^2 = M$, on devrait avoir $p\dfrac{3}{2}$, ce qui n'est pas le cas, donc l'équation $X^2 = M$, n'admet pas de solutions.

3) a) De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, or son cardinal est égal à $n = \dim(E)$, donc c'est une base, et pas suite c'est une famille génératrice de E, or $g(x_1) \in E$, d'où l'existence de nombres réels $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ tel que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

b) $g^2 = u + I_E$, d'où $u = g^2 - I_E$ et donc $gu = g^3 - g = ug$. Et par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $gu^k = u^k g$.
D'autre part on a les ègalités suivantes :

$$\begin{cases} g(x_1) = & \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ gu(x_1) = & u(g(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u(\\ \vdots & \\ gu^{n-1}(x_1) = & u^{n-1}(g(x_1)) = \alpha_0 u^{n-1}(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^{n-1}(x_1)) \end{cases}$$

Ainsi g et $\alpha_0 I_E + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$ coincident sur la base $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$,et comme elles sont linéaires elles coincidents sur E.

c) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que $\lambda_0 I_E + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_{p-1} u^{n-1} = 0$, on applique cette relation à x_1, on trouve $\lambda_0(x_1) + \lambda_1 u(x_1) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{n-1}(x_1) = 0$, or la famille $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est libre,
d'où $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, et donc $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre.
1 ére façon : $g^2 = I_E + u$.

2 ème façon :
$$\begin{aligned} g^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k\right)^2 \\ &= \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{q} \alpha_k\alpha_{q-k}\right) u^q \\ &= \sum_{q=0}^{n} \beta_k u^q \qquad \text{Avec : } \beta_k = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} \end{aligned}$$

Et par identification puisque la famille $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre, on a alors : $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\beta_q = 0, \quad \forall q \geq 2$.

d) $\alpha_0^2 = 1$, donc $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$.
Montrons par récurrence sur $q \in \{1, \ldots, n\}$, que α_q s'exprime de façon unique en fonction de α_0.
Pour $q = 1$, on a : $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\alpha_0}$, donc le résultat est vrai pour $q = 1$, supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $q - 1$, et montrons que c'est vrai pour q.
En effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \alpha_k\alpha_{q-k} = 0$, donc $2\alpha_q\alpha_0 = -\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k\alpha_{q-k}$,
or $1 \leq k \leq q-1$ et $1 \leq q-k \leq q-1$, d'où les $\alpha_k\alpha_{q-k}$ s'expriment de façon unique en fonction de α_0, donc leur somme aussi, et par la suite $2\alpha_q\alpha_0$ aussi et finalement α_q aussi.

e) Les solutions, g de l'équation $g^2 = I_E + u$, sont de la forme $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$, or $\forall q \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_q$ s'exprime de façon unique en fonction de $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$. Donc deux possibilités suivant la valeur prise par α_0.

4) L'équation peut s'écrire sous la forme $X^2 = I_1 + A$, avec :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$, donc $X = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$, avec les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 \in \{-1, 1\} & 2\alpha_0\alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 & 2\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0 \end{array}$$

Les solutions possibles sont :
$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 & , \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \quad , \alpha_2 = -\dfrac{1}{4} \quad , \alpha_3 = \dfrac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1 & , \alpha_1 = -\dfrac{1}{2} \quad , \alpha_2 = \dfrac{1}{4} \quad , \alpha_3 = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

PREMIER PROBLÉME.

Première partie.

1)
$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Longleftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) + 2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda \in \{2, 3\} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) &\Longleftrightarrow AX = 2X \\ &\Longleftrightarrow -x + y = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\right\}$, sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même
$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) &\Longleftrightarrow AX = 3X \\ &\Longleftrightarrow -2x + y = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\right\}$, sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) \cap \mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \{0\}$, de plus $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2})) + \dim(\mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2})) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$.

3) Prendre $\mathcal{B}' = e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, il est clair qu'elle est libre car son déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, de plus elle est de cardinal égal à $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) $f(e_1') = 2e_1', f(e_2') = 3e_2'$, donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) D'aprés un résultat de cours, on peut dire que : $A = PDP^{-1}$, avec $P = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deuxième partie.

1) D'aprés la question 6) de la partie 2, on peut dire que $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k =$
$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 3^k & -\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 2^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 3^k \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 2^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 3^k & -\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 2^k + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} 3^k \end{pmatrix}$$
. Ce qui donne les expressions demandées.

2) D'aprés l'inégalité de Taylor, on a : $e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, car les factorielles dominent les puissances.

3)
$$a_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow 2e^{2t} - e^{3t}.$$
$$b_n(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow -e^{2t} + e^{3t}.$$
$$c_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow 2e^{2t} - 2e^{3t}.$$
$$d_n(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(3t)^k}{k!} \longrightarrow e^{2t} + 2e^{3t}.$$
Et donc $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ -2e^{2t} - 2e^{3t} & e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$.

4) $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Prendre donc $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5)
a) $Q + R = I_2$ et $2Q + 3R = A$.

b) En résolvant le système :
$\begin{cases} Q + R = I_2 \\ 2Q + 3R = A \end{cases}$, on trouve que : $\begin{cases} Q = 3I_2 - A \\ R = -2I_2 + A \end{cases}$,
d'où $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R = (3e^{2t} - 2e^{3t})I_2 + (-e^{2t} + e^{3t})A$.

6) Tout calcul fait on trouve : $Q^2 = Q, R^2 = R, QR = RQ = 0 \qquad (*)$.

7) $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{3s}R)(e^{2t}Q + e^{3t}R) = e^{2(s+t)}Q + e^{3(s+t)}R = E(s+t)$, en utilisant les rrelations de (*), de même $E(t)E(s) = E(t+s) = E(s+t)$. En particulier $E(t)E(-t) = E(0) = Q + R = I_2$, d'où $E(t)$ est inversible, dont l'inverse est $E(-t)$.

8) $E(s) = E(t) \Longrightarrow E(s-t) = E(s)E(-t) = E(s)E(t)^{-1} = E(t)E(t)^{-1} = I_2$, or $E(s-t) = e^{2(s-t)}Q + e^{3(s-t)}R = (3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)})I_2 + (-e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)})A$, or la famille (A, I_2) est libre car ne sont pas proportionnels d'où le système :
$\begin{cases} 3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)} = 0 \\ -e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)} = 0 \end{cases}$, qui donne $e^{2(s-t)} = e^{3(s-t)} = 0$, d'où $s = t$, donc l'application $\begin{array}{rccc} E : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & E(t) \end{array}$ est injective.

Troisième partie.

1) a) $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

D'où :

$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + e^{-3t})v(t) \\ v_1(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-3t})v(t) \end{array} \right.$.

b) Donc u_1 et v_1 sont dérivables en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

Tout calcul fait et vu que $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{array} \right.$, on trouve $u_1'(t) = 0, v_1'(t) = 0$.

2) En tenant compte du système (S) on montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{array} \right. \quad \textit{si et seulement si} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = 0 \\ v_1'(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\textit{si et seulement si} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = \alpha \\ v_1(t) = \beta \end{array} \right.$$

$$\textit{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

car : $E(-t) = E(t)^{-1}$ $\quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Fin.