

## CORRIGÉ

### EXERCICE 1.

- 1)  $\lambda$  valeur propre de  $A \iff A - \lambda I_3$  non inversible      Ainsi le po-  
 $\iff \det(A - \lambda I_3) = 0$   
 $\iff (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = 0$   
 $\iff (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$   
 $\iff \lambda \in \{1, 2, 3\}$

lynôme caractéristique de  $a$  admet 3 racines distinctes, donc  $A$  diagonalisable car  $\dim(\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$  pour tout  $\lambda_i$ .

- 2)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , résolvons les systèmes  $AX = \lambda_i X$  pour trouver les  $e_i$ , où  $X = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ .

$$AX = X \implies x + 1 + z = 0 \text{ et } z = 0 \implies x = -1, y = 1, z = 0.$$

$$AX = 2X \implies 1 + z = 0 \text{ et } x + z = 0 \implies x = 1, y = 1, z = -1.$$

$$AX = 3X \implies -x + 1 + z = 0, x - 1 + z = 0, \text{ et } -z = 0 \\ \implies x = 1, y = 1, z = 0$$

$$\text{Posons } \mathcal{B}_2 = \left( e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- 3) Comme  $\text{Card}(\mathcal{B}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre, pour cela il suffit de montrer que  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \neq 0$ , où  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{En effet } \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

D'autre part  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ , donc  $\Delta = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , avec la relation suivante entre  $A$  et  $\Delta$  :

$$A = P\Delta P^{-1} \quad \text{avec : } P = P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$$

- 4) a)  $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v)$ , donc  $B^2 = ((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v))^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v^2) = A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ , d'où  $v^2 = u$ , et de même, on a :  $BA = B^3 = AB$ , d'où  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(uv) =$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(vu)$ , d'où  $uv = vu$ .

- b)  $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda v(e_i)$ , d'où  $v(e_i) \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  or  $\dim \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$  et  $e_i \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ , d'où  $e_i$  et  $v(e_i)$  sont proportionnels. Donc  $v(e_i) = \alpha_i e_i$  et par suite :

$$V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \text{ avec la relation suivante entre}$$

$B$  et  $V$  :

$$B = P\Delta P^{-1}$$

Or  $B^2 = A$ , d'où  $(PVP^{-1})^2 = PV^2P^{-1} = P\Delta P^{-1}$ , d'où  $V^2 = \Delta$ , donc  $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 2, \alpha_3^2 = 3$ , et donc :

$$\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

- 5) Les solutions de l'équations  $X^2 = A$  sont de la forme  $X = PVP^{-1}$ , il

y en a 8 solutions car on peut former 8 matrices,  $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$

avec les conditions :  $\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

## EXERCICE 2.

- 1) a)  $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^k = 0\}$ , donc  $u^{p-1} \neq 0$ , et par suite  $\exists x_0 \in E$  tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ .
- b) Soit  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$  tel que  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$ , on compose par  $u^{p-1}$  et comme  $u^k = 0, \forall k \geq p$ , alors  $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$ , or  $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ , d'où  $\lambda_0 = 0$ , ce qui donne  $\lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$ , on compose cette fois par  $u^{p-2}$ , ce qui donne  $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$ , d'où  $\lambda_1 = 0$  et on ré-itére le même procédé jusqu'à montrer que tous les  $\lambda_i$  sont nuls. D'où la famille  $\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre.
- c)  $\mathcal{C}$  est libre, donc  $\text{Card}(\mathcal{C}) = p \leq \dim(E) = n$ , or  $u^p = 0$  et  $n \geq p$ , d'où  $u^n = 0$ .

- 2) a)  $v^{2p} = (v^2)^p = u^p = 0$  et  $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$ .

Posons :  $q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } v^k = 0\}$ , donc  $2(p-1) < q \leq 2p$ , et comme dans ce qui précède pour  $u$ , on peut aussi affirmer pour  $v$  que  $q \leq n$ , ainsi  $2(p-1) + 1 \leq q \leq n$ , d'où  $2p-1 \leq n$ , d'où  $p \leq \frac{n+1}{2}$ .

- b) Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $M^2 = 0$  et  $M \neq 0$ , donc  $p = 2$ , pour  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , d'où suivant la question précédente si  $X^2 = M$ , on devrait avoir  $p \geq \frac{3}{2}$ , ce qui n'est pas le cas, donc l'équation  $X^2 = M$ , n'admet pas de solutions.

- 3) a) De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille  $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$  est libre, or son cardinal est égal à  $n = \dim(E)$ , donc c'est une base, et par suite c'est une famille génératrice de  $E$ , or  $g(x_1) \in E$ , d'où l'existence de nombres réels  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  tel que  $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$ .

- b)  $g^2 = u + I_E$ , d'où  $u = g^2 - I_E$  et donc  $gu = g^3 - g = ug$ . Et par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , on montre que  $gu^k = u^k g$ .

D'autre part on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ gu(x_1) = u(g(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u(x_1)) \\ \vdots \\ gu^{n-1}(x_1) = u^{n-1}(g(x_1)) = \alpha_0 u^{n-1}(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^{n-1}(x_1)) \end{cases}$$

Ainsi  $g$  et  $\alpha_0 I_E + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$  coïncident sur la base  $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ , et comme elles sont linéaires elles coïncident sur  $E$ .

- c) Soit  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  tel que  $\lambda_0 I_E + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1} = 0$ , on applique cette relation à  $x_1$ , on trouve  $\lambda_0 (x_1) + \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_1) = 0$ , or la famille  $(x_1, u(x_1), \dots, u^{p-1}(x_1))$  est libre, d'où  $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq p-1$ , et donc  $(I_E, u, \dots, u^{p-1})$  est libre. 1 ère façon :  $g^2 = I_E + u$ .

$$\begin{aligned}
2 \text{ème façon : } g^2 &= \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k \right)^2 \\
&= \sum_{q=0}^n \left( \sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} \right) u^q \\
&= \sum_{q=0}^n \beta_q u^q \quad \text{Avec : } \beta_q = \sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k}
\end{aligned}$$

Et par identification puisque la famille  $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$  est libre, on a alors :  $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$  et  $\beta_q = 0, \forall q \geq 2$ .

d)  $\alpha_0^2 = 1$ , donc  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ .

Montrons par récurrence sur  $q \in \{1, \dots, n\}$ , que  $\alpha_q$  s'exprime de façon unique en fonction de  $\alpha_0$ .

Pour  $q = 1$ , on a :  $\alpha_1 = \frac{1}{2\alpha_0}$ , donc le résultat est vrai pour  $q = 1$ , supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre  $q - 1$ , et montrons que c'est vrai pour  $q$ .

En effet  $\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ , donc  $2\alpha_q \alpha_0 = -\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k \alpha_{q-k}$ ,

or  $1 \leq k \leq q - 1$  et  $1 \leq q - k \leq q - 1$ , d'où les  $\alpha_k \alpha_{q-k}$  s'expriment de façon unique en fonction de  $\alpha_0$ , donc leur somme aussi, et par la suite  $2\alpha_q \alpha_0$  aussi et finalement  $\alpha_q$  aussi.

e) Les solutions,  $g$  de l'équation  $g^2 = I_E + u$ , sont de la forme  $g = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k$ , or  $\forall q \in \{1, \dots, n\}, \alpha_q$  s'exprime de façon unique en fonction de  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ . Donc deux possibilités suivant la valeur prise par  $\alpha_0$ .

4) L'équation peut s'écrire sous la forme  $X^2 = I_1 + A$ , avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ qui vérifie } A^4 = 0 \text{ et } A^3 \neq 0, \text{ donc } X =$$

$\alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$ , avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \in \{-1, 1\} & \quad 2\alpha_0\alpha_1 = 1 \\
2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 & \quad 2\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

Les solutions possibles sont :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 & , \alpha_1 = \frac{1}{2} & , \alpha_2 = -\frac{1}{4} & , \alpha_3 = \frac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1 & , \alpha_1 = -\frac{1}{2} & , \alpha_2 = \frac{1}{4} & , \alpha_3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

## PREMIER PROBLÈME.

### Première partie.

$$\begin{aligned}
1) \quad \lambda \text{ valeur propre de } A & \iff A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\
& \iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\
& \iff (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = 0 \\
& \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\
& \iff \lambda \in \{2, 3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) & \iff AX = 2X \\
& \iff -x + y = 0
\end{aligned}$$

Donc  $\text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R} \right\}$ , sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
\text{De même } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) & \iff AX = 3X \\
& \iff -2x + y = 0
\end{aligned}$$

Donc  $\text{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R} \right\}$ , sa dimension est égale à 1, et ayant pour base le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Il est clair que  $\text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) \cap \text{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \{0\}$ , de plus  $\dim(\text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2})) + \dim(\text{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2})) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ , donc  $\text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) \oplus \text{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$ .

3) Prendre  $\mathcal{B}' = e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , il est clair qu'elle est libre car son déterminant est  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , de plus elle est de cardinal égal à  $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ , donc c'est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

4)  $f(e'_1) = 2e'_1, f(e'_2) = 3e'_2$ , donc  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

5) D'après un résultat de cours, on peut dire que :  $A = PDP^{-1}$ , avec  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

6)  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .  
 $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$

### Deuxième partie.

1) D'après la question 6) de la partie 2, on peut dire que  $E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 3^k & -\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 2^k + \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 3^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 2^{k+1} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 3^k & -\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 2^k + 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 3^k \end{pmatrix}. \text{ Ce qui donne les}$$

expressions demandées.

2) D'après l'inégalité de Taylor, on a :  $e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , car les factorielles dominent les puissances.

3)  $a_n(t) = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(3t)^k}{k!} \rightarrow 2e^{2t} - e^{3t}$ .

$b_n(t) = -\sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(3t)^k}{k!} \rightarrow -e^{2t} + e^{3t}$ .

$c_n(t) = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{(3t)^k}{k!} \rightarrow 2e^{2t} - 2e^{3t}$ .

$d_n(t) = -\sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(3t)^k}{k!} \rightarrow e^{2t} + 2e^{3t}$ .

Et donc  $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ -2e^{2t} - 2e^{3t} & e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$ .

4)  $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Prendre donc  $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

5) a)  $Q + R = I_2$  et  $2Q + 3R = A$ .

b) En résolvant le système :

$$\begin{cases} Q + R = I_2 \\ 2Q + 3R = A \end{cases}, \text{ on trouve que : } \begin{cases} Q = 3I_2 - A \\ R = -2I_2 + A \end{cases},$$

d'où  $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R = (3e^{2t} - 2e^{3t})I_2 + (-e^{2t} + e^{3t})A$ .

6) Tout calcul fait on trouve :  $Q^2 = Q, R^2 = R, QR = RQ = 0$  (\*).

7)  $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{3s}R)(e^{2t}Q + e^{3t}R) = e^{2(s+t)}Q + e^{3(s+t)}R = E(s+t)$ , en utilisant les relations de (\*), de même  $E(t)E(s) = E(t+s) = E(s+t)$ . En particulier  $E(t)E(-t) = E(0) = Q + R = I_2$ , d'où  $E(t)$  est inversible, dont l'inverse est  $E(-t)$ .

8)  $E(s) = E(t) \implies E(s-t) = E(s)E(-t) = E(s)E(t)^{-1} = E(t)E(t)^{-1} = I_2$ , or  $E(s-t) = e^{2(s-t)}Q + e^{3(s-t)}R = (3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)})I_2 + (-e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)})A$ , or la famille  $(A, I_2)$  est libre car ne sont pas proportionnels d'où le système :

$$\begin{cases} 3e^{2(s-t)} - 2e^{3(s-t)} = 0 \\ -e^{2(s-t)} + e^{3(s-t)} = 0 \end{cases}, \text{ qui donne } e^{2(s-t)} = e^{3(s-t)} = 0, \text{ d'où } s = t,$$

donc l'application  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est injective.

$$t \mapsto E(t)$$

**Troisième partie.**

$$1) \quad a) \quad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$(S) \quad \begin{cases} u_1(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + e^{-3t})v(t) \\ v_1(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-3t})v(t) \end{cases}.$$

b) Donc  $u_1$  et  $v_1$  sont dérivables en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

Tout calcul fait et vu que  $\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$ , on trouve  $u'_1(t) = 0, v'_1(t) = 0$ .

2) En tenant compte du système (S) on montre que :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} u'_1(t) = 0 \\ v'_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si} \quad \begin{cases} u_1(t) = \alpha \\ v_1(t) = \beta \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{car : } E(-t) = E(t)^{-1}$$

**Fin.**