**MPSI 1** **2002-2003**

**CPGE Agadir**

# Controle N°4

**Lundi le:16-Décembre-2002**

*Programme* : *Fonctions usuelles* & *convexes*
*Durée*:1*h*30*mn*

## *Fonctions usuelle*

1. **Rappel** : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin(x)) = x, \forall x \in [0,\pi]$
$\arccos(\cos(x)) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arctan(\tan(x)) = x, \cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi, \sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ ou
$a = \pi - b + 2k\pi, \tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b + k\pi$
2. (8.5 points)
   - **a**. (0.25 pts) Montrer que $\forall x \in IR, \exists! k \in Z$ tel que $\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ exprimer $k$ en fonction de $x$
   - **b**. (0.75 pts) En deduire $\arctan(\tan(x))$ en fonction de $x, \forall x \in IR$
   - **c**. (0.75 pts) Résoudre $\arctan(\tan(2x)) - \arctan(\tan(x)) = x$
   - **d**. (1.25 pt) Montrer que$\forall (x,y) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $1 - xy \neq 0$, on a :
   $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$ où $k$ est un entier a déterminer
   - **e**. (0.25 pts) Etudier sur $IR^*$ la fonction $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$
   - **f**. (0.25 pts) En déduire que $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = C^{te}$ qu'on précisera suivant le signe de $x$
   - **a**. (0.5 pts) On suppose $k$ (entier trouvé dans $(1.a)$ ) pair exprimer dans ce cas $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de $x$
   - **b**. (0.25 pts) Exprimer pour tout $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin(y))$ en fonction de $y$
   - **c**. (0.75 pts) On suppose $k$ impair exprimer dans ce cas $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de $x$
   - **d**. (1.25 pt) Résoudre l'equation suivante : $2\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(2x))$
   - **a**. (0.25 pts) Montrer que $\forall x \in IR, \exists! k' \in Z$ tel que $k'\pi \leq x < (k'+1)\pi$ exprimer $k'$ en fonction de $x$
   - **b**. (0.75 pts)On suppose $k'$ pair exprimer dans ce cas $\arccos(\cos(x))$ en fonction de $x$
   - **c**. (0.25 pts) Exprimer pour tout $y \in [-\pi, 0]$ $\arccos(\cos(y))$ en fonction de $y$
   - **d**. (0.75 pts)On suppose $k'$ impair exprimer dans ce cas $\arccos(\cos(x))$ en fonction de $x$
   - **e**. (1.25 pt) Résoudre l'equation suivante : $\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)) = x + y$

## *Fonctions Convexes*

1. (3 points) Soit $f$ de classe $C^2$convexe sur $IR$ , on suppose qu'il existe $(a,b) \in IR^2$ et $t \in ]0,1[$ tel que $f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b)$
   - **a**. (1.5 pt) Représenter grapiquement cette situation en la justifiant d'une facon rigoureuse
   - **b**. (0.5 pts) Donner l'equation de la corde $y = y(x)$ de la courbe sur $[a,b]$
   - **c**. (0.5 pts) Montrer que $f - y$ est convexe et s'annule au moins une fois entre $a, b$
   - **d**. (0.5 pts) En deduire que $f - y = 0$ sur $[a,b]$ puis que $f$ est afine sur $[a,b]$
2. (1 point)Montrer que $\forall n \in IN^*, \forall (x_i) \in IR^{+n}$ on a : $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$