

Controle N°4

Lundi le: 16-Décembre-2002

Programme : Fonctions usuelles & convexes

Durée: 1h30mn

Fonctions usuelle

- 1. Rappel :** $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \arcsin(\sin(x)) = x, \forall x \in [0, \pi]$
 $\arccos(\cos(x)) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 $\arctan(\tan(x)) = x, \cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi, \sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ ou
 $a = \pi - b + 2k\pi, \tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b + k\pi$
- 2. (8.5 points)**
- a. (0.25 pts) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ exprimer k en fonction de x
 - b. (0.75 pts) En deduire $\arctan(\tan(x))$ en fonction de $x, \forall x \in \mathbb{R}$
 - c. (0.75 pts) Résoudre $\arctan(\tan(2x)) - \arctan(\tan(x)) = x$
 - d. (1.25 pt) Montrer que $\forall (x, y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $1 - xy \neq 0$, on a :
 $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$ où k est un entier a déterminer
 - e. (0.25 pts) Etudier sur \mathbb{R}^* la fonction $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
 - f. (0.25 pts) En déduire que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = C^{te}$ qu'on précisera suivant le signe de x
 - a. (0.5 pts) On suppose k (entier trouvé dans (1.a)) pair exprimer dans ce cas $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de x
 - b. (0.25 pts) Exprimer pour tout $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \arcsin(\sin(y))$ en fonction de y
 - c. (0.75 pts) On suppose k impair exprimer dans ce cas $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de x
 - d. (1.25 pt) Résoudre l'équation suivante : $2 \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(2x))$
 - a. (0.25 pts) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k'\pi \leq x < (k'+1)\pi$ exprimer k' en fonction de x
 - b. (0.75 pts) On suppose k' pair exprimer dans ce cas $\arccos(\cos(x))$ en fonction de x
 - c. (0.25 pts) Exprimer pour tout $y \in [-\pi, 0] \arccos(\cos(y))$ en fonction de y
 - d. (0.75 pts) On suppose k' impair exprimer dans ce cas $\arccos(\cos(x))$ en fonction de x
 - e. (1.25 pt) Résoudre l'équation suivante : $\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)) = x + y$

Fonctions Convexes

- 1. (3 points)** Soit f de classe C^2 convexe sur \mathbb{R} , on suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0, 1[$ tel que $f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b)$
- a. (1.5 pt) Représenter graphiquement cette situation en la justifiant d'une façon rigoureuse
 - b. (0.5 pts) Donner l'équation de la corde $y = y(x)$ de la courbe sur $[a, b]$
 - c. (0.5 pts) Montrer que $f - y$ est convexe et s'annule au moins une fois entre a, b
 - d. (0.5 pts) En deduire que $f - y = 0$ sur $[a, b]$ puis que f est affine sur $[a, b]$

- 2. (1 point)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i) \in \mathbb{R}^{+n}$ on a : $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n}$