بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 1: *Dérivées, primitives Fonctions usuelles*

Exercice 1 .

1) **On a** $(x^{2n})^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}x^n$, **d'autre part :**

$$(x^nx^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k (x^n)^{(k)}(x^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}x^k = n!x^n \sum_{k=0}^{n}\left(\mathcal{C}_n^k\right)^2,$$

par identification on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\mathcal{C}_n^k\right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

2) **Pour** $n = 0$, **le résultat est évident. Supposons que** $\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin x\right)^{(n)} = 2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$, **donc**

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin x\right)^{(n+1)} &= 2^n\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right)\right)' = 2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{n+1}\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right) + \tfrac{1}{2}\cos\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{n+1}\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\left(\cos\tfrac{\pi}{6}\sin\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right) + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\left(x+n\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{n+1}\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\left(\sin\left(x+(n+1)\tfrac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 .

1) $1 - \tanh^2 x = 1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

2) **Le domaine de définition de** arccos **est** $[-1,1]$, **or** $-1 \leq \tanh x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, **donc** $f(x) = \arccos(\tanh x)$ **est définie pour tout** $x \in \mathbb{R}$. **De même** $g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$ **est définie pour tout** $x \in \mathbb{R}$.

3) arccos **est dérivable sur** $]-1,1[$ **or** $\tanh x \in]-1,1[,\ \forall x \in \mathbb{R}$, **donc** $f(x) = \arccos(\tanh x)$ **est dérivable en tout** $x \in \mathbb{R}$ **avec** $f'(x) = (\tanh x)'\arccos'(\tanh x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \times (-\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}) = -\dfrac{1}{\cosh x}$.

arcsin **est dérivable sur** $]-1,1[$ **or** $\cosh x \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, **donc** $0 \leq \frac{1}{\cosh x} \leq 1$ **mais** $\frac{1}{\cosh x} = 1$ **pour** $x = 0$, **donc** $g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$ **est dérivable en tout point** $x \neq 0$, **avec** $g'(x) = \left(\frac{1}{\cosh x}\right)'\arcsin'\left(\frac{1}{\cosh x}\right) = -\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2 x}}} = -\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}}} = -\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = -\dfrac{1}{\cosh x}$.

4) **D'après ce qui précède, on a** $f'(x) = g'(x)$, **donc** $f(x) = g(x) + Cte$, **avec** $Cte = 0$ **car** $f(0) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ **et** $g(0) = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 .

Questions préliminaires :

a)
$$H(v(x))-H(u(x)) = \int_a^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{u(x)}^a f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

b) u, v **et** G **sont de classe** $\mathcal{C}^1$**, donc** $F(x) = G(v(x)) - G(u(x))$ **l'est aussi, avec**

$$F'(x) = (H(v(x)))' - (H(u(x)))' = v'(x)H'(v(x)) - u'(x)H'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \quad (1)$$

1) En tout un réel x **strictement positif différent de 1, les fonctions** $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ **et** $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ **sont continues sur l'intervalle d'extrémités** x **et** x^2**, donc y admettent des primitives, ce qui justifie l'existence des intégrales.**

2) On remarque que $\dfrac{1}{t\ln t}$ **n'est autre que la dérivée de** $\ln(\ln t)$**, donc**

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} (\ln(\ln t))'\mathrm{d}t = \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) = \ln(2\ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2 \quad (2)$$

3) On déduit d'après la relation (1) du préliminaire que F **est dérivable** ($u(x) = x, v(x) = x^2, f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$) **avec** $F'(x) = \dfrac{2x}{\ln x^2} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$**, en particulier** $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} F'(x) = 1$**.**

4.a) On distingue deux cas :

1èr cas $x > 1$**, donc** $x \leq x^2$**, pour tout** $x \leq t \leq x^2$**, on a** $\dfrac{1}{\ln(x^2)} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{1}{\ln x}$**, donc**

$$\frac{x^2-x}{\ln(x^2)} = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\mathrm{d}t \leq F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}t = \frac{x^2-x}{\ln x} \quad (3)$$

2ème cas $x < 1$**, pareil que le 1ér cas, juste faire attention pour la rédaction, car** $x \geq x^2$**.**

b) On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x\dfrac{x-1}{\ln x} = 0$**, donc** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} F(x) = 0$**. D'autre part** $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x-1}{\ln x} = +\infty$ **et on en déduit que** $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$**.**

c) D'après (3) on a $\dfrac{x-1}{2\ \ln x} \leq \dfrac{F(x)}{x} \leq \dfrac{x-1}{\ln x}$ **, on en déduit deux choses :**

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{F(x)}{x} = 0$ **, autrement dit** F **est dérivable en 0 avec** $F'(0) = 0$**.**
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$ **, autrement dit la courbe de** F **admet une branche parabolique de direction** (oy)**.**

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$**, on a :** $F(x) - G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ \ln t}\right)\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ \ln t}\mathrm{d}t =$ $H(x^2) - H(x)$ **où** H **primitive de** $h : t \mapsto \dfrac{t-1}{t\ \ln t}$**. ainsi** $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \big(F(x) - G(x)\big) = 0$ **car** H **continue, d'où** $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} G(x) = \ln 2$ **(d'après (2).**

On posera dans la suite $F(1) = \ln 2$**.**

6) On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} F'(x) = 1$ **(prolongement de la dérivée) donc** F **est dérivable au point 1, avec** $F'(1) = 1$**.**

Fin

à la prochaine