DL 4 : *Fonctions Réelles*

A rendre Jeudi le 15 Janvier 2004

PARTIE A :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\quad g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln|x|$.
   (a) Etudier les variations de g ; en déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Montrer en particulier qu'il existe un unique réel négatif α tel que $g(\alpha) = 0$;
   (c) Donner une valeur approchée de α à $0,1$ près.
2. Soit h la fonction définie pour $x > 1$ par $\quad h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.
   (a) Montrer que $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^3}\, u(x)$, où u est une fonction que l'on déterminera.
   (b) Etudier les variations de u, le signe de $u(x)$, puis le signe de $h'(x)$ pour $x > 1$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes des intervalles de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 1.
   On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.
2. On admet que $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2}$. Montrer que la fonction f est dérivable au point 1 et calculer $f'(1)$.
3. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm.). On calculera $f(-1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(4)$.

PARTIE C :

On se propose d'étudier la suite u_n définie par la condition initiale $u_0 = 4$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) : \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que : $\exists k \in]0,1[, \exists x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\quad |f'(x)| \leq k$.
   .On pourra remarquer que $f'(x) = f(x) > h(x)$ pour $x > 1$.
2. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer que l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ est stable par f.
4. Des questions précédentes, déduire la convergence de la suite (u_n).

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc