DL 4BisBis : *Fonctions réelles*

A rendre Mardi 02 Janvier 2005

Problème 1:

Algorithme de Newton :

1. Soit $a > 0$,étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$
2. Justifier que la suite définie par $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{a - x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}$.
5. En déduire que $x_n \to \sqrt{a}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
7. En déduire une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, a .
8. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près (on admet que $2 < e < 2.8$).
9. Ecrire un programme en $Maple$ qui affiche les 20 premiers termes de la suite x_n.
10. écrire un programme en $Maple$ qui donne une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-8} près .

DS : 98-99

Problème 2:

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Ecrire un programme $Maple$ qui affiche les 20 premiers termes de la suit (u_n).
2. Calculer a l'aide d'une calculatrice la valeur de u_{10}.
3. Etudier sur $[0, 1]$ la fonction $f$définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$, En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge ,calculer sa limite.
4. Dans toute la suite on pose $v_n = 1 - u_n$
   (a) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 - v_n}$
   (b) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_n} \geq \frac{n+3}{2}$
   (c) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$
   (d) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}$
   (e) En déduire que $\forall n \geq 2$ on a : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.
   (f) En déduire que $\forall n \geq 2$ on a : $\frac{1}{v_n} \leq \frac{n+3}{2} + \ln(n+2)$.
   (g) En déduire un équivalent simple de v_n puis de u_n .

Controle 99-2000

Problème 3:

Pour $n \geq 3$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Etudier les variations de f_n en déduire que l'é quation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n tels que : $0 < u_n < n < v_n$.

   On se propose dans la suite de chercher un équivalent simple de u_n et v_n quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $1 < u_n < e$.
3. Calculer $f_n(u_{n+1})$ en déduire que (u_n) est monotone puis qu'elle converge vers 1 .
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = 1$,en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.
5. Calculer $\lim(v_n)$.
6. Calculer $f(n\ln(n))$ puis montrer que $n\ln(n) < v_n$ pour $n \geq 3$.
7. Pour $x > 0$ on pose $g(x) = x - 2\ln(x)$ étudier le signe de g en déduire que : $n > 2ln(n)$.
8. En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis établir que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
9. Conclure que $v_n \sim n\ln(n)$.

DS : 99-2000

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca