

**Devoir Surveillé N°3****Samedi le: 30-Novembre-2002**Programme: Fonctions RéellesDurée: 3 heures 30mn**Maxi-Problème:** (9 points)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ on pose : } f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

1. Comparaison de  $f_n(x)$ ,  $e^x$ .
  - a. (0,25 pts) Calculer  $f'_n(x)$ .
  - b. (0,5 pts) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0$  on a  $f_n(x) \leq e^x$ . (*Indication* : On pourra raisonner par récurrence)
  - c. (0,5 pts) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0$  on a  $f_{2n+1}(x) \leq e^x \leq f_{2n}(x)$  (*Indication* : On pourra raisonner par récurrence)
2. Etude de l'équation  $f_n(x) = 0$ 
  - a. (0,25 pts) En déduire de ce qui précède le signe de  $f_{2n}(x)$  sur  $\mathbb{R}$  puis l'ensemble de solution de l'équation  $f_{2n}(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. (0,5 pts) En déduire que l'équation  $f_{2n+1}(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on notera dans la suite  $x_n$ .
  - c. (0,25 pts) Calculer  $x_0$ .
  - d. (0,5 pts) Montrer que  $x_n < 0$ .
  - e. (0,75 pts) En déduire les tableaux de variations de  $f_{2n}, f_{2n+1}$
  - f. (0,25 pts) Dessiner les courbes représentatives de  $f_{2n}, f_{2n+1}$  dans un même repère.
3. Cas particulier : Etude de l'équation  $f_3(x) = 0$ 
  - a. (0,25 pts) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0$  où  $t = x + 1, g(t) = t^3 + 3t + 2$
  - b. (0,25 pts) En déduire que l'équation  $t^3 + 3t + 2 = 0$  admet une solution unique que l'on notera  $r$
  - c. (1 pt) Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  solutions de  $X^2 - rX - 1 = 0$ , montrer que  $g(u + v) = 0$ , en déduire  $u^3 + v^3, u^3v^3$
  - d. (0,25 pts) En déduire  $u^3, v^3$  puis  $u, v$ . Exprimer enfin  $r$  puis  $x_1$  en fonction de  $\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1$ .
4. Etude de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 
  - a. (1 pt) Déterminer le signe de  $f_{2n+1}(-2n - 1)$ , en déduire que  $-2n - 1 \leq x_n$ . (*Indication*: On pourra regrouper les termes dans la somme deux à deux)
  - b. (1 pt) Étudier le signe de  $f_{2n+3}(x_n)$ , en déduire que  $(x_{n+1})$  monotone . puisque  $(x_n)$  converge vers une limite réelle finie  $l \leq 0$
  - c. (0,5 pts) Montrer que :  $0 \leq e^{x_n} \leq -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$  (*Indication* : On pourra utiliser la Partie 1)
  - d. (0,5 pts) On suppose que  $l < 0$ , montrer alors que  $-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - e. (0,5 pts) En déduire une contradiction puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$

**Moyen-Problème:**(6 points)

Soit  $a \in ]0, 1[$  on se propose d'étudier les solutions des équations  $f_n(x) = 0$  où

$(n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a)$

1. (0.25 pts) Montrer que  $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$  est croissante
2. (1 pt) Etudier  $f_n$  sur  $]0, 1[$ , en déduire que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0, 1[$  que l'on notera  $x_n$
3. (0.25 pts) Dire pourquoi  $\frac{n-1}{2n} \leq x_n \leq 1$
4. (1 pt) Etudier le signe de  $f_n(x_{n+1})$  en déduire que  $(x_n)$  est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie  $l$
5. (1 pt) Montrer que  $l = 1$
6. (0,5 pts) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = a$
7. (0,5 pts) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $x_n^n \geq a$
8. (0.75 pts) Montrer que  $\forall (x, y, b) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}^* : (x \geq y \geq b \geq 0) \Rightarrow x - y \leq \frac{x^n - y^n}{nb^{n-1}}$
9. (0.25 pts) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq \frac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \frac{x_n^n - a}{na}$
10. (0,5 pts) Donner un équivalent simple de  $(x_n)$

**Mini-Problème :**(5 point)

1. Pour tout entier  $n$  et réel  $x$  on pose  $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n - 1$
2. (0.75 pts) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[0, 1]$  que l'on notera  $x_n$
3. (1 pt) calculer  $f_{n+1}(x_n)$  en déduire que  $(x_n)$  est décroissante puis qu'elle converge vers une limite finie  $l$
4. (1 pt) montrer que pour  $x$  différent de 1 on a :  $f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - 1$
5. (0.25 pts) calculer  $x_2$ ,
6. (1 pt) En déduire les limites des suites  $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$ .