MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°3

Samedi le:**30-Novembre-2002**

Programme: *Fonctions Réelles*

Durée:3 *heures* 30*mn*

Maxi-Probléme: (9 points)

$\forall n \in IN, \forall x \in IR$ on pose : $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1. Comparaison de $f_n(x), e^x$.

a. (0,25 pts) Calculer $f'_n(x)$.

b. (0,5 pts) Montrer que : $\forall n \in IN, \forall x > 0$ on a $f_n(x) \leq e^x$.(*Indication* : On pourra raisonner par récurrence)

c. (0,5 pts) Montrer que : $\forall n \in IN, \forall x < 0$ on a $f_{2n+1}(x) \leq e^x \leq f_{2n}(x)$ (*Indication* : On pourra raisonner par récurrence)

2. Etude de l'équation $f_n(x) = 0$

a. (0,25 pts) En déduire de ce qui précéde le signe de $f_{2n}(x)$ sur IR puis l'ensemble de solution de l'équation $f_{2n}(x) = 0$ sur IR.

b. (0,5 pts) En déduire que l'équation $f_{2n+1}(x) = 0$ admet une unique solution dans IR que l'on notera dasn la suite x_n.

c. (0,25 pts) Calculer x_0.

d. (0,5 pts) Montrer que $x_n < 0$.

e. (0,75 pts) En deduire les tableaux de variations de f_{2n}, f_{2n+1}

f. (0.25 pts) Dessiner les courbes reoresentatives de f_{2n}, f_{2n+1} dans un meme repére.

3. Cas particulier : Etude de l'équation $f_3(x) = 0$

a. (0.25 pts) Montrer que $\forall x \in IR,\ f_3(x) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0$ où $t = x + 1, g(t) = t^3 + 3t + 2$

b. (0.25 pts) En deduire que l'équation $t^3 + 3t + 2 = 0$ admet une solution unique que l"on notera r

c. (1 pt) Soient $(u, v) \in IR^2$ solutions de $X^2 - rX - 1 = 0$, montrer que $g(u + v) = 0$,en deduire $u^3 + v^3, u^3v^3$

d. (0.25 pts)En deduire u^3, v^3 puis u, v.Exprimer enfin r puis x_1 en fonction de $\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1$.

4. Etude de la suite $(x_n)_{n \in IN}$

a. (1 pt) Determiner le signe de $f_{2n+1}(-2n - 1)$, en deduire que $-2n - 1 \leq x_n$.(*Indication*:On pourra regrouper les termes dans la somme deux a deux)

b. (1 pt) Etudier le signe de $f_{2n+3}(x_n)$, en deduire que (x_{n+1}) monotone .puisque (x_n) converge vers une limite réelle finie $l \leq 0$

c. (0,5 pts) Montrer que : $0 \leq e^{x_n} \leq -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (*Indication* : On pourra utiliser la Partie 1)

d. (0,5 pts) On suppose que $l < 0$,montrer alors que $-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e. (0,5 pts) En deduire une contradiction puis que $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$

Moyen-Probléme:(6 points)

Soit $a \in]0,1[$ on se propose d'étudier les solutions des équations $f_n(x) = 0$ où $(n \in IN^*, f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a)$

1. (0.25 pts) Montrer que $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ est croissante
2. (1 pt) Etudier f_n sur $]0,1[$,en deduire que l'équations $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,1[$ que l'on notera x_n
3. (0.25 pts) Dire pourquoi $\frac{n-1}{2n} \leq x_n \leq 1$
4. (1 pt) Etudier le signe de $f_n(x_{n+1})$ en deduire que (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie l
5. (1 pt) Montrer que $l = 1$
6. (0,5 pts) En deduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = a$
7. (0,5 pts) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $x_n^n \geq a$
8. (0.75 pts) Montrer que $\forall (x,y,b) \in IR^3, \forall n \in IN^* : (x \geq y \geq b \geq 0) \Rightarrow x - y \leq \frac{x^n - y^n}{nb^{n-1}}$
9. (0.25 pts) En deduire que $\forall n \in IN^*$ on a : $0 \leq \frac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \frac{x_n^n - a}{na}$
10. (0,5 pts) Donner un equivalent simple de (x_n)

Mini-Probléme :(5 point)

1. Pour tout entier n et réel x on pose $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + . + nx^n - 1$
2. (0.75 pts) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet un solution unique dans $[0,1]$ que l'on notera x_n
3. (1 pt) calculer $f_{n+1}(x_n)$ en déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers une limite finie l
4. (1 pt) montrer que pour x différent de 1 on a :$f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - 1$
5. (0.25 pts) calculer x_2,
6. (1 pt) En déduire les limites des suites $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$.