

Devoir Surveillé N°3**Corrigé****Maxi-Problème:**

1.

- a. $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$
 b. facile
 c. facile

2.

- a. $f_n(x)' = f_{n-1}(x)f_{2n}(x) > 0, f_{2n+1}(x)' = f_{2n}(x) > 0$
 b. donc f_{2n} strictement décroissante et
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{2n+1}(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2n+1}(x) = +\infty, x_0 = -1, x_n \geq 0 \Rightarrow f_{2n+1}(x_n) > 0$ contradiction
 c. $x_0 = -1$
 d. car $x_n \geq 0 \Rightarrow 0 = f_n(x_n) \geq 1$ absurde
 e. facile
 f. facile

3.

- a. facile
 b. facile
 c. $r = x_1 + 1$ car $u + v = r, g(r) = 0, g(t) = t^3 + 3t + 2 \Rightarrow (u + v)^3 + 3(u + v) + 2 = 0 \Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3u + 3v + 2 = 0 \Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = -3u - 3v - 2$
 car $u + v = r, uv = -1$ ainsi $u^3 + v^3 = -2, u^3v^3 = -1$
 d. Donc u^3, v^3 solutions de $X^2 + 2X - 1 = 0$ donc
 $u^3 = -1 - \sqrt{2}, v^3 = -1 + \sqrt{2}, u = -\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, v = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}, r = u + v, x_1 = r - 1$

4.

- a. $f_{2n+1}(-2n-1) = [1 + (-2n-1)] + \left[\frac{(-2n-1)^2}{2!} - \frac{(-2n-1)^3}{3!} \right] + \dots + \left[\frac{(-2n-1)^{2n}}{2n!} - \frac{(-2n-1)^{2n+1}}{2n+1!} \right]$
 montrer ensuite que chaque expression entre [] est négative donc
 $f_{2n+1}(-2n-1) \leq 0 = f_{2n+1}(x_n)$ or f croissante donc $-2n-1 \leq x_n$
 b. $f_{2n+3}(x_n) = f_{2n+1}(x_n) + \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x_n^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{x_n}{2n+3} \right) = \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\frac{2n+3+x_n}{2n+3} \right) \geq 0 =$
 or f_{2n+3} croissante donc $x_{n+1} \leq x_n$ en plus majorée par 0 donc converge
 c. $f_{2n+1}(x_n) = 0 \leq e^{x_n} \leq f_{2n}(x_n) = f_{2n+1}(x_n) - \frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}, (x_n)$ croissante vers l
 donc $x_n \leq l$ donc $-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!} 0 \leq e^{x_n} \leq -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}$
 d. donc $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = e^l \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ Absurde

Moyen-Problème:

1. Facile

2. $f_n(0)f_n(1) = -a(1-a) \leq 0, f'_n(x) = x^{n-2}(2nx - (n-1)) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{n-1}{2n}, f_n\left(\frac{n-1}{2n}\right) =$

3. D'après le tableau de variation ci-dessus

4. $f_n(x_{n+1}) = 2x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} - a = \frac{2x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^n}{x_{n+1}} - a = a \frac{1-x_{n+1}}{x_{n+1}} \geq 0 = f_n(x_n), f_n$ croissante sur $\left[\frac{n}{2(n+1)}, 1 \right], x_n \geq \frac{n-1}{2n}, x_{n+1} \geq \frac{n}{2(n+1)} \geq \frac{n-1}{2n}$, donc (x_n) croissante majorée par 1 donc

converge

5. supposons $l \neq 0$ alors $l < 1$ (puisque $0 \leq x_n \leq 1$) or (x_n) croissante donc $0 \leq x_n \leq l$ donc $0 \leq x_n^{n-1} \leq l^{n-1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n-1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$, $f_n(x_n) = 2x_n^n - x_n^{n-1} - a = 0 \Rightarrow a = 0$
(on passe a la limite dans cette égalité) Contradiction avec $0 < a < 1$
6. $x_n f_n(x_n) = 2x_n^{n+1} - x_n^n - ax_n = 0 \Rightarrow x_n^n = \frac{ax_n}{2x_n-1} \rightarrow a$
7. $x_n^n = a \frac{x_n}{2x_n-1} \geq a, \left(\frac{x_n}{2x_n-1} \geq 1 \right)$
8. utiliser le TAF pour $f(t) = \sqrt[n]{t}$ sur $[x^n, y^n]$
9. $x = x_n, y = b = \sqrt[n]{a}$
10. $x_n \sim \sqrt[n]{a}$

Mini-Problème:

- 1.
2. $f_n' > 0, f_n(0)f_n(1) \leq 0$
3. $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + (n+1)x_n^{n+1} = (n+1)x_n^{n+1} \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}), f_{n+1}$ croissante donc $x_n \geq x_{n+1}$
4. $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n - 1 = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n) - (1 + x + x^2 + \dots + x^n)$
5. x_2 solution de $2x^2 + x - 1 = 0, x_1 \in \left\{ -\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right\}, x_1 = \frac{3}{4} \in [0, 1]$
6. $0 \leq x_n \leq x_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq x_n^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0, 0 \leq nx_n^n \leq n\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$, en remplaçant $x = x_n$ dans (3) et vu que $f_n(x_n) = 0$ puis on passe a la limite on trouve que $\frac{l}{(l-1)^2} = 1, l^2 - 3l + 1 = 0, l \in \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}, l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puisque $0 < l < 1$