MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°3

Corrigé

Maxi-Probléme:

1.

- **a.** $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$
- **b.** facile
- **c.** facile

2.

- **a.** $f_n(x)' = f_{n-1}(x) f_{2n}(x) > 0, f_{2n+1}(x)' = f_{2n}(x) > 0$
- **b.** donc f_{2n} strictement decroissante et $\lim_{x\to-\infty} f_{2n+1}(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f_{2n+1}(x) = +\infty x_0 = -1. x_n \geq 0 \Rightarrow f_{2n+1}(x_n) > 0$ contradiction
- **c.** $x_0 = -1$
- **d.** car $x_n \geq 0 \Rightarrow 0 = f_n(x_n) \geq 1$ absurde
- **e.** facile
- **f.** facile

3.

- **a.** facile
- **b.** facile
- **c.** $r = x_1 + 1$car$u + v = r, g(r) = 0, g(t) = t^3 + 3t + 2 \Rightarrow (u+v)^3 + 3(u+v) + 2 = 0 \Rightarrow u^3 +$ car $u + v = r, uv = -1$ ainsi $u^3 + v^3 = -2, u^3v^3 = -1$
- **d.** Donc u^3, v^3 solutions de $X^2 + 2X - 1 = 0$ donc $u^3 = -1 - \sqrt{2}, v^3 = -1 + \sqrt{2}, u = -\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, v = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}, r = u + v, x_1 = r - 1$

4.

- **a.** $f_{2n+1}(-2n-1) = [1 + (-2n-1)] + \left[\frac{(-2n-1)^2}{2!} - \frac{(-2n-1)^3}{3!}\right] + \ldots\ldots\ldots + \left[\frac{(-2n-1)^{2n}}{2n!} - \frac{(-2n-1)^{2n+1}}{2n+1!}\right.$
  montrer ensuite que chaque expression entre [ ] est negative donc
  $f_{2n+1}(-2n-1) \leq 0 = f_{2n+1}(x_n)$ or f croissante donc $-2n-1 \leq x_n$
- **b.** $f_{2n+3}(x_n) = f_{2n+1}(x_n) + \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x_n^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 + \frac{x_n}{2n+3}\right) = \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(\frac{2n+3+x_n}{2n+3}\right) \geq 0 =$
  or f_{2n+3} croissante donc $x_{n+1} \leq x_n$ en plus majorée par 0 donc converge
- **c.** $f_{2n+1}(x_n) = 0 \leq e^{x_n} \leq f_{2n}(x_n) = f_{2n+1}(x_n) - \frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}, (x_n)$ croissante vers l
  donc $x_n \leq l$ donc $-\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!} 0 \leq e^{x_n} \leq -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- **d.** donc $0 \leq \lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = e^l \leq \lim_{n\to+\infty} -\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ Absurde

Moyen-Probléme:

1. Facile

2. $f_n(0) f_n(1) = -a(1-a) \leq 0, f_n'(x) = x^{n-2}(2nx - (n-1)) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{n-1}{2n}, f_n\left(\frac{n-1}{2n}\right) =$

3. D'aprés le tableau de variation ci-dessus

4. $f_n(x_{n+1}) = 2x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} - a = \frac{2x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^n}{x_{n+1}} - a = a\frac{1-x_{n+1}}{x_{n+1}} \geq 0 = f_n(x_n), f_n$ croissante sur $\left[\frac{n}{2(n+1)}, 1\right], x_n \geq \frac{n-1}{2n}, x_{n+1} \geq \frac{n}{2(n+1)} \geq \frac{n-1}{2n}$, donc (x_n) croissante majorée par 1 donc converge

5. supposons $l \neq 0$ alors $l < 1$ (puisque $0 \leq x_n \leq 1$) or (x_n) croissante donc $0 \leq x_n \leq l$ donc $0 \leq x_n^{n-1} \leq l^{n-1}$ donc $\lim\limits_{+\infty} x_n^{n-1} = 0, \lim\limits_{+\infty} x_n^n = 0l = 0,\ f_n(x_n) = 2x_n^n - x_n^{n-1} - a = 0 \Rightarrow a = 0$ (on passe a la limite dans cette égalité) Contradiction avec $0 < a < 1$
6. $x_n f_n(x_n) = 2x_n^{n+1} - x_n^n - ax_n = 0 \Rightarrow x_n^n = \frac{ax_n}{2x_n-1} \to a$
7. $x_n^n = a\frac{x_n}{2x_n-1} \geq a, \left(\frac{x_n}{2x_n-1} \geq 1\right)$
8. utiliser le TAF pour $f(t) = \sqrt[n]{t}$ sur $[x^n, y^n]$
9. $x = x_n, y = b = \sqrt[n]{a}$
10. $x_n \sim \sqrt[n]{a}$

<u>Mini-Probléme</u>:

1.
2. $f_n' > 0, f_n(0)f_n(1) \leq 0$
3. $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + (n+1)x_n^{n+1} = (n+1)x_n^{n+1} \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}),\ f_{n+1}$ croissante donc $x_n \geq x_{n+1}$
4. $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + . + nx^n - 1 = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + . + (n+1)x^n) - (1 + x + x^2 + ... +$
5. x_2 solution de $2x^2 + x - 1 = 0, x_1 \in \left\{-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right\}, x_1 = \frac{3}{4} \in [0,1]$
6. $0 \leq x_n \leq x_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq x_n^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0, 0 \leq nx_n^n \leq n\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0,$ en remplacant $x = x_n$ dans (3) et vu que $f_n(x_n) = 0$ puis on passe a la limite on trouve que $\frac{l}{(l-1)^2} = 1, l^2 - 3l + 1 = 0, l \in \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}, l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puisque $0 < l < 1$