DS 4 : *Fonctions réelles*

Jeudi le 15 Janvier 2004

Durée : 3 heures 30 mn

Maxi-Probléme : *14 points .*

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante $K_\varphi \geqslant 0$ telle que

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K_\varphi |x-y|\ .$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x),$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés. Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I - Question préliminaire

(0.75 pts) .Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(2) \qquad F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$$

$$(3) \qquad F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.2) *(0.5 pts)* .Montrer que $\mathcal{L}$ est stable par addition et multiplication par une constante.

II.2) *(0.5 pts)* .Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que, pour que $f \in \mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.

II.3) *(0.5 pts)* .f et g étant deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit $f \cdot g$ est aussi une fonction de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

II.4) *(0.5 pts)* .Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

II.5) *(0.75 pts)* .Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leqslant x - y \leqslant 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(x+na)$ admet une limite finie quand $N \longrightarrow +\infty$ et on notera par $F(x)$ cette limite.

b) *(1.25 pts)* .Montrer que la fonction $F \in \mathcal{L}$ et c'est la seule qui vérifie (1) .

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) *(0.25 pts)* .On suppose que f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) *(0.75 pts)* .On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par :

$$F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} \quad . \tag{5}$$

c) *(0.25 pts)* .On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

III.B.1)

a) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(x+na)$ admet une limite finie quand $N \longrightarrow +\infty$ et on notera par $F(x)$ cette limite.

b) *(0.5 pts)* .Montrer que la fonction $F \in \mathcal{L}$ et c'est la seule qui vérifie (1) .

III.B.2) Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante.

a) *(0.25 pts)* .f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

b) *(0.25 pts)* .f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.

c) *(0.25 pts)* .f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

IV.A.1) *(0.75 pts)* .Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2)

a) *(0.5 pts)* .Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x+a) = 0$.

b) *(0.25 pts)* .Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).F est-elle unique ?

IV.A.3) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) *(0.5 pts)* .Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) *(0.75 pts)* .Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

IV.B.1)

a) *(0.25 pts)* .Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+a) = 0$.

b) *(0.25 pts)* .Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), F est-elle unique ?

IV.B.2) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) *(0.75 pts)* .Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) *(0.75 pts)* .Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3) On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) *(1.25 pts)* .Montrer que la suite $u_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n f(x+n)$ converge quand $N \longrightarrow +\infty$.

Indication :On pourra montrer que les suites $(u_{2N}), (u_{2N+1})$ sont adjacentes

b) *(1.75 pts)* .Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (pour établir que $F \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la Question II.5).

Moyen-Probléme : *4.75 points*

Partie A :

1. *(0.5 pts)* .Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln|x|$. Étudier les variations de g ; en déduire le signe de $g(x)$. Montrer en particulier qu'il existe un unique réel négatif α tel que $g(\alpha) = 0$; donner une valeur approchée de α à $0,1$ près.
2. *(0.5 pts)* .Soit h la fonction définie pour $x > 1$ par $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. Montrer que $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^3} u(x)$, où u est une fonction que l'on déterminera. Étudier les variations de u, le signe de $u(x)$, puis le signe de $h'(x)$ pour $x > 1$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

1. *(0.5 pts)* .Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes des intervalles de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 1. *On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.*
2. *(0.5 pts)* .On admet que $\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2}$. Montrer que la fonction f est dérivable au point 1 et calculer $f'(1)$.
3. *(0.5 pts)* .Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm.). On calculera $f(-1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(4)$.

Partie C :

On se propose d'étudier la suite u_n définie par la condition initiale $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *(0.75 pts)* .Montrer qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\quad |f'(x)| \leqslant k$.
   (On pourra remarquer que $f'(x) = f(x)h(x)$ pour $x > 1$).
2. *(0.25 pts)* .Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = x$.

3. *(0.25 pts)* .Montrer que l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ est stable par f.
4. *(0.75 pts)* .Des questions précédentes, déduire la convergence de la suite (u_n).

Mini-probléme : *3.75 points*

On rappelle que, pour tout α réel, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur cet intervalle, et de dérivée $x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$.

1. On considère la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha} .$$
   (a) *0.5 points* .Montrer que $f'_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{x} \cdot \varphi(\alpha \ln x)$, où φ est la fonction $u \mapsto 1-(1+u)\, e^u$.
   (b) *(0.75 points)* .Etudier la fonction φ sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$ en discutant selon les valeurs de α. On étudiera notamment l'existence d'un prolongement par continuité en 0 et la dérivabilité éventuelle en ce point.
   (c) *(0.5 points)* .La courbe représentative de f_α est notée C_α.Sur un même schéma, on donnera sommairement l'allure d'une courbe C_α pour $\alpha > 0$ et pour $\alpha < 0$.
   (d) *(0.5 points)* .Si α et β sont deux réels distincts, quels sont les points d'intersection des courbes C_α et C_β ?
2. *(0.75 points)* .Soit $M(x, y)$ un point du plan avec $x > 0$, $y > 0$. À quelle condition sur x et y existe-t-il une courbe C_α passant par M ? Sur le même schéma qu'à la question **1.d.**, hachurer le lieu des points de coordonnées (x, y), avec $x > 0$, $y > 0$, par lesquels ne passe aucune des courbes C_α.
3. *(0.75 points)* .Donner une équation cartésienne de la courbe lieu des points en lesquels l'une des courbes C_α admet une tangente passant par l'origine.

FIN