

DS 4 : *Fonctions réelles*

Jeudi le 15 Janvier 2004

Durée : 3 heures 30 mn

Maxi-Problème : 14 points .

On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} et \mathcal{L} le sous-ensemble de \mathcal{F} formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y| .$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x + a) = f(x),$$

où f est une fonction de \mathcal{L} donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés. Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I - Question préliminaire

(0.75 pts) .Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(2) \quad F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka)$$

$$(3) \quad F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) - \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} f(x - ka).$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.2) (0.5 pts) .Montrer que \mathcal{L} est stable par addition et multiplication par une constante.

II.2) (0.5 pts) .Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que, pour que $f \in \mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.

II.3) (0.5 pts) . f et g étant deux fonctions bornées de \mathcal{L} , montrer que leur produit $f \cdot g$ est aussi une fonction de \mathcal{L} . En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

II.4) (0.5 pts) .Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

$$(4) \quad \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B.$$

II.5) (0.75 pts) .Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

III.A - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{n=0}^N \lambda^n f(x + na)$ admet une limite finie quand $N \rightarrow +\infty$ et on notera par $F(x)$ cette limite.

b) (1.25 pts) .Montrer que la fonction $F \in \mathcal{L}$ et c'est la seule qui vérifie (1) .

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) (0.25 pts) .On suppose que f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) (0.75 pts) .On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par :

$$(5) \quad F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} .$$

c) (0.25 pts) .On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

III.B.1)

a) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{n=0}^N \lambda^n f(x + na)$ admet une limite finie quand $N \rightarrow +\infty$ et on notera par $F(x)$ cette limite.

b) (0.5 pts) .Montrer que la fonction $F \in \mathcal{L}$ et c'est la seule qui vérifie (1) .

III.B.2) Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante.

a) (0.25 pts) . f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

b) (0.25 pts) . f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.

c) (0.25 pts) . f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

IV.A - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

IV.A.1) (0.75 pts) .Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2)

a) (0.5 pts) .Montrer, en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x + a) = 0$.

b) (0.25 pts) .Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.A.3) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) (0.5 pts) .Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) (0.75 pts) .Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

IV.B.1)

a) (0.25 pts) .Montrer, en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + F(x + a) = 0$.

b) (0.25 pts) .Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), F est-elle unique ?

IV.B.2) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) (0.75 pts) .Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) (0.75 pts) .Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3) On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) (1.25 pts) .Montrer que la suite $u_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n f(x+n)$ converge quand $N \rightarrow +\infty$.

Indication : On pourra montrer que les suites $(u_{2N}), (u_{2N+1})$ sont adjacentes

b) (1.75 pts) .Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ (pour établir que $F \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la Question II.5).

Moyen-Problème : 4.75 points

Partie A :

- (0.5 pts) .Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln|x|$. Étudier les variations de g ; en déduire le signe de $g(x)$. Montrer en particulier qu'il existe un unique réel négatif α tel que $g(\alpha) = 0$; donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
- (0.5 pts) .Soit h la fonction définie pour $x > 1$ par $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. Montrer que $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^3} u(x)$, où u est une fonction que l'on déterminera. Étudier les variations de u , le signe de $u(x)$, puis le signe de $h'(x)$ pour $x > 1$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

- (0.5 pts) .Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes des intervalles de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 1. *On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.*
- (0.5 pts) .On admet que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2}$. Montrer que la fonction f est dérivable au point 1 et calculer $f'(1)$.
- (0.5 pts) .Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm.). On calculera $f(-1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(2)$ et $f(4)$.

Partie C :

On se propose d'étudier la suite u_n définie par la condition initiale $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (0.75 pts) .Montrer qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2}, +\infty[\quad |f'(x)| \leq k$.
(On pourra remarquer que $f'(x) = f(x)h(x)$ pour $x > 1$).
- (0.25 pts) .Résoudre, sur \mathbb{R}_+^* , l'équation $f(x) = x$.

3. (0.25 pts) .Montrer que l'intervalle $[\frac{3}{2}, 4]$ est stable par f .
4. (0.75 pts) .Des questions précédentes, déduire la convergence de la suite (u_n) .

Mini-problème : 3.75 points

On rappelle que, pour tout α réel, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est définie sur \mathbb{R}_+^* , dérivable sur cet intervalle, et de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

1. On considère la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ de fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par

$$f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha}.$$

- (a) (0.5 points) .Montrer que $f'_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{x} \cdot \varphi(\alpha \ln x)$, où φ est la fonction $u \mapsto 1 - (1+u)e^u$.
 - (b) (0.75 points) .Etudier la fonction φ sur \mathbb{R} . En déduire les variations de f_α sur \mathbb{R}_+^* en discutant selon les valeurs de α . On étudiera notamment l'existence d'un prolongement par continuité en 0 et la dérivabilité éventuelle en ce point.
 - (c) (0.5 points) .La courbe représentative de f_α est notée C_α . Sur un même schéma, on donnera sommairement l'allure d'une courbe C_α pour $\alpha > 0$ et pour $\alpha < 0$.
 - (d) (0.5 points) .Si α et β sont deux réels distincts, quels sont les points d'intersection des courbes C_α et C_β ?
2. (0.75 points) .Soit $M(x, y)$ un point du plan avec $x > 0, y > 0$. À quelle condition sur x et y existe-t-il une courbe C_α passant par M ? Sur le même schéma qu'à la question 1.d., hachurer le lieu des points de coordonnées (x, y) , avec $x > 0, y > 0$, par lesquels ne passe aucune des courbes C_α .
 3. (0.75 points) .Donner une équation cartésienne de la courbe lieu des points en lesquels l'une des courbes C_α admet une tangente passant par l'origine.
-

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc