DS 4 : *Fonctions réelles*

Jeudi le 15 Janvier 2004

Corrigé

Maxi-Probléme :

Partie I - Question préliminaire

Par récurrence :La formule (2) est vraie pour $n = 1$ et, si elle est vraie au rang n, l'application de la formule (1) en $x + na$ donne la formule au rang $n + 1$.

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) Résultat du cours.

II.2) Résultat du cours.

II.3) Résultat du cours pour la 1ére question ,pour la 2éme la réponse est non.Contre-exepmle : $f(x) = x, g(x) = x$ sont à dérivées bornées sur $\mathbb{R}$ donc lipchitzienne mais fg ne l'est pas.

II.4) Soit $f \in \mathcal{L}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + K_f|x|$.

II.5) Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$, par exemple $x \geqslant y$, et $n = \mathrm{E}[x - y]$. Alors $f(x) - f(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[f(x-k) - f(x-k-1)] + f(x-n) - f(y)$. Donc $|f(x) - f(y)| \leqslant M(n+x-n-y)$, et $|f(x)-f(y)| \leqslant M(x-y)$. Donc $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(x+na)$ quand $N \longrightarrow +\infty$ et on notera par $F(x)$ cette limite.

b) F vérifie (1) :$F(x) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(x+na), F(x+a) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^n f(x+(n+1)a), \lambda F(x+a) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{n+1} f(x+(n+1)a) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda^n f(x+na), F(x) - F(x+a) = f(x)$ .On a utilisé ici le résultat suivant : $\lim_{N\longrightarrow+\infty} u_N = l \Rightarrow \lim_{N\longrightarrow+\infty} u_{N-1} = l$

$F \in \mathcal{L}$: Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$: $|F(x) - F(y)| = \left| \lim_{N\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \lambda^n [f(x+na) - f(y+na)] \right) \right| \leqslant \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N} |\lambda|^n K_f |x-y| = K_f|x-y| \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N} |\lambda|^n = \frac{K_f}{1-\lambda}|x-y|$.

Unicité : Soit G une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1), $G - F$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $(G-F)(x) = \lambda(G-F)(x+a) = \lambda^n(G-F)(x+na)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $|(G-F)(x)| \leqslant$

$|\lambda|^n\left(A|x+na|+B\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $F=G$ .Noter Bien $n|\lambda|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $|\lambda|<1$.

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) $f_1(x)=1$. $F_1(x)=\frac{1}{1-\lambda}$ ·.

b) et c) $\sum\limits_{n=0}^{N}\lambda^n\exp\left(i(x+na)\right)=e^{ix}\frac{1-\lambda^{N+1}e^{i(N+1)x}}{1-\lambda e^{ia}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{ix}-\lambda e^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ · . F_2 et F_3 sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée.

$$F_2(x)=\frac{\cos x-\lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2} \quad , \quad F_3(x)=\frac{\sin x-\lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

III.B -

III.B.1)

a) .

b) En remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et a par $-a$ et $f(x)$ par $\frac{-f(x-a)}{\lambda}$ dans II.A.1.a et b), on obtient le résultat pour $|\lambda|>1$.

III.B.2) .

a),b) et c) Avec la même remarque précedente on trouve que :F_1,F_2,F_3 ne changent pas d'expressions.

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda|=1$

IV.A - .

IV.A.1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=F(x)-F(x+a)$, d'où $|f(x)|\leqslant K_F|a|$. f est donc bornée.

IV.A.2)

a) Prendre :$\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$.

b) Non : $F(x)+\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ vérifie aussi (1).

IV.A.3) .

a) En faisant tendre λ vers 1 dans (5), on obtient l'expression $F(x)=\dfrac{\cos x-\cos(x-a)}{2(1-\cos a)}$ ($\cos a\neq 1$). Cette fonction F est lipschitzienne car somme de deux fonctions lipschitzienness et vérifie $F(x)-F(x+a)=\cos x$ pour tout x (passage à la limite quand λ tend vers 1 dans (1), vérifiée par F_2 .

b) Soit $F\in\mathcal{L}$ vérifiant (1). Donc $F(x)=F(x+2n\pi)+n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi)=F(2\pi)+n$ et $F(2n\pi)=F(0)-n$, on obtient, pour tout n, $F((2n+1)\pi)-F(2n\pi)=2n+F(\pi)-F(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, or $F\in\mathcal{L}$,donc $|F((2n+1)\pi)-F(2n\pi)|\leqslant K_F\pi$ est bornée.*Absurde*.Il n'y a donc aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B -

IV.B.1)

a) Prendre $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ par exemple.

b) Non : la fonction $x\longmapsto F(x)+\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1) aussi.

IV.B.2)

a) Même rédaction qie IV.A.3.a.

b) Soit $F\in\mathcal{L}$ vérifiant (1). Donc, $F(x)=(-1)^nF(x+n\pi)+n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi)=F(\pi)+2n$ et $F(2n\pi)=F(0)-2n$, on obtient, pout tout n, $F((2n+1)\pi)-F(2n\pi)=4n+F(\pi)-F(0)$, pareil qu'en IV.a.3.b on trouve une contradiction.

IV.B.3)

a) Classique ,vu en TD

b) F vérifie (1) : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+F(x+1)=\lim\limits_{N\longrightarrow+\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n\left[f(x+n)+f(x+n+1)\right]=$ $\lim\limits_{N\longrightarrow+\infty}\left(f(x)+(-1)^{N+1}f(x+N+1)\right)$ (car somme telescopique) $=f(x)$ car $\lim\limits_{+\infty}f=0$.

$\lim\limits_{+\infty}F=0$:Soit $N\in\mathbb{N}$ comme f décroissante on a : $\left|\sum\limits_{n=p}^{N}(-1)^n f(x+n)\right|\leqslant f(x)+(-1)^N f(x+N)$.(*par récurrence sur* N) . à la limite quand $N\longrightarrow+\infty$ on obtient : $0\leqslant|F(x)|\leqslant f(x)\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$.

Moyen-Probléme :

Partie A :

1. On a $g'(x)=\frac{1-x}{x^2}$ .les limites en $-\infty$, $+\infty$ et 0^- sont évidentes. $g(x)=\frac{x-1-x\ \ln|x|}{x}$, d'où $\lim\limits_{0^+}g(x)=-\infty$.On a $g'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_-^*$, donc g est continue et strictement croissante et établit une bijection de $]-\infty,0[$ vers $\mathbb{R}$ (car les limites aux bornes de l'intervalle sont $-\infty$ et $+\infty$), donc il existe un unique $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ tel que $g(\alpha)=0$. $\alpha\simeq-3,59$.
2. C'est du calcul : on obtient $u(x)=-3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+2\ln x$. On en tire $u'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x^3}$: la fonction u est croissante strictement sur $[1,+\infty[$ avec $u(1)=0$, donc $h'(x)>0$ sur $]1,+\infty[$.

Partie B :

1. f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.$\lim\limits_{-\infty}f=\lim\limits_{+\infty}f=1$.$\lim\limits_{0}f=+\infty$.$\lim\limits_{1}f=e$.
2. $\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-e}{t}=e\left(\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}\right)=e\left(\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right)\left(\frac{\frac{\ln(1+t)-1}{t}-1}{t}\right)=e\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right)$ où $x=\frac{\ln(1+t)}{t}-1\underset{t\longrightarrow0}{\longrightarrow}0$ .D'où $f'(1)=\lim\limits_{t\longrightarrow0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=-\dfrac{e}{2}$.
3. On a $f'(x)=\frac{g(x)f(x)}{(x-1)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. avec

$$f(-1)=1\ ,\quad f\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\ ,\quad f(2)=2\ ,\quad f(4)=\sqrt[3]{4}\ .$$

Partie C :

1. $\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ on a $|f(x)|\leqslant f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{9}{4}\right)$.$|h(x)|\leqslant f\left(\dfrac{3}{2}\right)\leqslant 0.3=\dfrac{3}{10}$,donc :

$$|f'(x)|=|f(x)h(x)|\leqslant\frac{27}{40}=k$$

2. $x_0=2$.
3. f est décroissante donc : $f\left(\left[\dfrac{3}{2},4\right]\right)=\left[f(4),f\left(\frac{3}{2}\right)\right]=\left[\sqrt[3]{4},\frac{9}{4}\right]\subset\left[\dfrac{3}{2},4\right]$.
4. $|u_n-2|=|f(u_{n-1})-f(2)|\leqslant k|u_{n-1}-2|\cdots\leqslant k^n|u_0-2|\longrightarrow0$ d'où $u_n\longrightarrow2$.

Mini-probléme :

---

1. (a) Du calcul .

   (b) $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(u) = -(u+2)\,e^u$, $\lim\limits_{-\infty}\varphi(u) = 1$. On a donc $\varphi(u) > 0$ pour $u < 0$ et $\varphi(u) < 0$ pour $u > 0$. De $f'_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{x}\,\varphi(\alpha\,\ln x)$, on déduit que :

   $$f'_\alpha(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha \ln x < 0$$
   $$f'_\alpha(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha \ln x > 0$$

   Si $\alpha > 0$: on prolonge par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$ et

   $$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{f_\alpha(x)}{x} = x^{-x^\alpha} = e^{-x^\alpha \ln x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$$

   Si $\alpha < 0$ impossible .

   (c) .

   (d) $x = 1$.

2. • si $(x, y) = (1, 1)$, tout réel α est solution .

   • si $x = 1$ et $y \neq 1$, il n'y a pas de solution .

   • si $x \neq 1$, **(E)** $\iff$ $x^\alpha = 1 - \frac{\ln y}{\ln x}$.

   On trouve alors une solution si et seulement si $1 - \frac{\ln y}{\ln x} > 0$, soit $\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\ln x} < 0$, càd

   $$(x < 1 \quad \text{et} \quad y > x) \qquad \text{ou} \qquad (x > 1 \quad \text{et} \quad y < x)\ .$$

3. la tangente au point d'abscisse x passe par $O \Leftrightarrow f'_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{x} \Leftrightarrow \varphi(\alpha\,\ln x) = 1 \Leftrightarrow \alpha\,\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-\dfrac{1}{\alpha}}$ .La courbe recherchée a donc pour équation cartésienne

   $$y = f_\alpha\left(e^{-\dfrac{1}{\alpha}}\right) = x^{1-\dfrac{1}{\alpha}} = x^{1+\ln(x)}$$

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc