ESCP 2004, math 1, option scientifique

On note **E** l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite adaptée à f, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = s_n f(nx) \qquad (1)$$

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et tout polynôme P sera confondu avec la fonction polynomiale, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui lui est naturellement associée.
Pour tout entier naturel p non nul, et toute fonction p fois dérivable f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée p-ième de la fonction f est notée $f^{(p)}$ (la dérivée première de f est aussi notée f').
On rappelle que, T étant un réel non nul, une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

L'objet du problème est de déterminer certaines des fonctions f satisfaisant l'équation (1).

Partie I : Résultats généraux et exemples d'éléments de E

1) Soit f une fonction appartenant à **E**, autre que la fonction nulle. Montrer qu'il existe une *unique* suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ adaptée à f, et que $s_1 = 1$.

2) Montrer que si f est une fonction dérivable appartenant à **E**, alors la dérivée f' de f appartient à **E**.

3) Montrer que les fonctions constantes appartiennent à **E**.

4) Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \dfrac{1}{2}$. Établir que A est élément de **E**.

5) **E** constitue-t-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

6) Soit χ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, déterminer, en distinguant les cas $nx \in \mathbb{Z}$ et $nx \notin \mathbb{Z}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x + \frac{k}{n})$.
En déduire que χ appartient à **E**, la suite adaptée étant constante, égale à 1.

7)a) Pour tout réel x et tous entiers naturels non nuls p et n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})}$, et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\big(2p\pi(x + \frac{k}{n})\big) = \begin{cases} n\cos(2p\pi x) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Soit u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\cos(2\pi x)$. Montrer que u appartient à **E**, et préciser la suite adaptée à u.

c) Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$.

Soit alors v la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x))$. Montrer que v appartient à **E**, et préciser la suite adaptée à v.

Partie II : Recherche des polynômes éléments de E

1)a) Montrer que si P est un polynôme de degré 1 élément de $\mathbf{E}$, alors la suite adaptée au polynôme P est constante, égale à 1.

b) Quels sont les polynômes de degré 1 appartenant à $\mathbf{E}$?

2) On suppose dans cette question que P est un polynôme non nul élément de $\mathbf{E}$, et on note p le degré de P.

a) Montrer que la suite adaptée à P est la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$$

b) Montrer que, si p est au moins égal à 1, on a l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

3) Établir que, pour tout polynôme Q, il existe un unique polynôme P tel que $P' = Q$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On peut donc définir une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de la manière suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B_p' = pB_{p-1} \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

4)a) Déterminer, pour chaque entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

b) Vérifier, pour tout réel x, l'égalité : $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, puis calculer $B_2(x)$ pour tout réel x.

5) On a déjà vu dans la partie I que B_0 et B_1 sont des éléments de $\mathbf{E}$. Vérifier que B_2 est élément de $\mathbf{E}$.

6) Soit p un entier naturel non nul. On suppose que B_{p-1} est élément de $\mathbf{E}$ et on veut montrer que B_p est élément de $\mathbf{E}$. Pour cela, on fixe un entier naturel non nul n et on pose, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p(x + \frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx)$$

a) Montrer que la fonction $\varphi - \psi$ est constante.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{1/n} \psi(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Établir que $\varphi - \psi = 0$ et conclure.

7) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel p, les polynômes de degré p qui appartiennent à $\mathbf{E}$ sont exactement les polynômes λB_p obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.

Partie III : Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

1) Soit δ la fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, associe la fonction $\delta(\varphi)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(\varphi)(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

a) Montrer que δ est linéaire. Quelle propriété caractérise les éléments de son noyau ?

b) Vérifier que, lorsque P est une fonction polynomiale, il en est de même de $\delta(P)$, puis préciser le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ lorsque P est de degré p supérieur ou égal à 1.

2) Montrer que, si f est une fonction élément de $\mathbf{E}$, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad s_n\delta(f)(nx) = \delta(f)(x) \qquad (2)$$

3) Soit g une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha g(2x) = g(x) \qquad (3)$$

a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k}) \qquad (4)$

b) Montrer que si $\alpha = 0$, alors g est nulle.

c) Montrer que si $|\alpha| > 1$, alors g est nulle.

d) On suppose $0 < |\alpha| \leqslant 1$. Justifier l'existence d'un entier naturel p et d'un réel β tels que :

$$|\beta| > 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x)$$

e) En déduire que, dans tous les cas, g est polynomiale.

4) Dans cette question, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ élément de $\mathbf{E}$, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et que $\delta(f)$ n'est pas la fonction nulle.

a) Montrer que $\delta(f)$ est une fonction polynomiale non nulle ; on note q son degré.

b) À l'aide de (2), montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\quad s_n = \dfrac{1}{n^q}$
puis montrer qu'il existe un réel non nul a tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(f)(x) = ax^q$.

c) Pour chaque entier naturel non nul p, montrer, en appliquant ce dernier résultat à la fonction polynomiale B_p introduite dans la partie II, qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(B_p)(x) = px^{p-1}$$

d) Montrer qu'il existe un réel λ non nul et un entier p non nul tels que la fonction $\delta(f - \lambda B_p)$ soit nulle. Établir alors que la fonction $h = f - \lambda B_p$ est une fonction 1-périodique, de classe C^∞ et élément de $\mathbf{E}$, et en préciser une suite adaptée.

Partie IV : Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1-périodiques de E

1) Dans cette question préliminaire, on suppose que g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 1-périodique, telle que, pour tout réel x, $g(nx)$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $g(k) = 0$.

b) Montrer que $g(\frac{1}{2}) = 0$. Plus généralement, montrer que, pour tout entier relatif p et tout entier naturel non nul q, on a l'égalité : $g(\frac{p}{q}) = 0$.

c) En déduire que g est la fonction nulle.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ et 1-périodique, élément de $\mathbf{E}$, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2)a) Montrer que l'application qui à tout réel x associe $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

b) Pour tout réel x, montrer que $\dfrac{s_n}{n} f(nx)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3) On suppose dans cette question que $\dfrac{|s_n|}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
Montrer, à l'aide de la question 1), que f est la fonction nulle.

4) Dans cette question, on suppose plus généralement qu'il existe un entier naturel k tel que $n^k\,|s_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

a) Montrer, en considérant une dérivée d'ordre suffisant de f , que f est polynomiale.

b) Montrer que f est constante.

5) À l'aide du résultat final de la partie III, montrer que les fonctions de classe C^∞ appartenant à $\mathbf{E}$ et qui ne sont pas 1-périodiques sont exactement les fonctions polynomiales du type λB_p, obtenues lorsque p décrit $\mathbb{N}^*$ et λ décrit $\mathbb{R}^*$.