

CORRIGÉ DS 4

Fonctions réelles

Lundi le 10 Janvier 2005

Partie I : Résultats généraux et exemples d'éléments de E

1. f est non nulle, donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et soit $(s_n), (s'_n)$ deux suites adaptées à f , donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, on a : $s_n f(nx) = s'_n f(nx)$, en particulier pour $x = \frac{x_0}{n}$ on aura $s_n f(nx_0) = s'_n f(nx_0)$, or $f(x_0) \neq 0$, d'où $s_n = s'_n$, donc la suite (s_n) est unique, d'autre part pour $n = 1, x = x_0$, on a : $f(x_0) = s_1 f(x_0)$, d'où $s_1 = 1$.

2. Si $f \in E$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = s_n f(nx)$, si on dérive cette égalité on trouve $\sum_{k=0}^{n-1} f'(x + \frac{k}{n}) = n s_n f'(nx)$, donc $f' \in E$ et a $(n s_n)$ comme suite adaptée.

3. Soit f une fonction constante de valeur a , alors $\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = na = n f(nx)$, donc $f \in E$ avec comme suite adaptée la suite $s_n = n$.

4. $A(x) = x - \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} A(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}) = n(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k = n(x - \frac{1}{2}) + \frac{(n-1)n}{2n} = nx - \frac{1}{2} = A(nx)$, donc A vérifie (1) avec $s_n = 1$ comme suite adaptée.

5. Oui car il est d'abord non vide et stable pour les loi + et .

6. 1^{er} cas : $nx = p \in \mathbb{Z}$, alors $\chi(nx) = 1$, et $x + \frac{k}{n} = \frac{p+k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, ainsi on a exactement n entiers consécutifs qui sont $p, p+1, \dots, p+n-1$ parmi eux un seul est divisible par n , donc parmi les nombres $x + \frac{k}{n} = \frac{p+k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ un seul est dans \mathbb{Z} , d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x + \frac{k}{n}\right) = 1 = \chi(nx).$$

1^{ème} cas : $nx = p \notin \mathbb{Z}$, alors $\chi(nx) = 0$, supposons que $\exists k \in [0, n-1]$ tel que : $x + \frac{k}{n} = p \in \mathbb{Z}$, alors $nx = np - k \in \mathbb{Z}$, contradiction, et donc $\forall k \in [0, n-1] \quad x + \frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$, et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x + \frac{k}{n}\right) = 0 = \chi(nx).$$

Conclusion : χ vérifie (1) avec comme suite adaptée $s_n = 1$.

7. (a) $S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x + \frac{k}{n})} = e^{2ip\pi x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi \frac{k}{n}} = e^{2ip\pi x} \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ avec $a = e^{2ip\pi \frac{1}{n}}$.

Si p est multiple de n alors $a = 1$, et donc $S = ne^{2ip\pi x}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2p\pi(x + \frac{k}{n})) = \Re e(S) = n \cos(2p\pi x)$.

Sinon alors $S = e^{2ip\pi x} \frac{1-a^n}{1-a} = e^{2ip\pi x} \frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{2ip\pi/n}} = 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2p\pi(x + \frac{k}{n})) = \Re(S) = 0$.

(b) On applique la formule précédente pour $p = 1$, si $n = 1$ on a : $\sum_{k=0}^{n-1} u(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2p\pi(x + \frac{k}{n})) = \cos(2\pi x) = s_1 u(x)$ et pour $n \geq 2$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} u(x + \frac{k}{n}) = 0$, donc u vérifie (1) avec comme suite adaptée la suite (s_n) tel que : $s_1 = 1, s_n = 0 \quad \forall n \geq 2$.

(c) On a $|\frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi x)| \leq \frac{1}{2^q}$, donc le terme général de la série est majoré par celui d'une série de Riemann convergente, d'où la série de terme général $\frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi x)$ est normalement convergente. On peut en particulier permuter les sommes donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})),$$

or, en prenant $p = 2^q$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})) = 0$ si n ne divise pas 2^q , c'est à dire si n n'est pas une puissance de 2, on prend alors $s_n = 0$,

et si $n = 2^\alpha$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})) = 2^\alpha \cos(2^{q+1}\pi x) \quad \forall q \geq \alpha$

et dans ce cas $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2^{q+1}\pi(x + \frac{k}{n})) =$

$$\sum_{q=\alpha}^{+\infty} \frac{1}{2^{q-\alpha}} \cos(2^{q+1}\pi x) = \sum_{q'=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{q'}} \cos(2^{q'+1}\pi n x) = v(nx), \text{ en faisant le changement de}$$

variable $p' = q - \alpha$ et en remplaçant 2^α par n , dans ce cas on prend $s_n = 1$.

Conclusion : la fonction v vérifie bien l'égalité (1) avec comme suite adaptée $s_n = 1$ si n est une puissance de 2 et $s_n = 0$ sinon.

Partie II : Recherche des polynômes éléments de E

1. (a) Posons $P(x) = ax + b$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} P(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (ax + \frac{ak}{n} + b) = n(ax + b) + \frac{a(n-1)}{2} = anx + \frac{n(2b-a)-1}{2} = s_n P(nx) = s_n anx + s_n b \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $s_n = 1$.

(b) D'après la formule précédente on a aussi $\frac{n(2b-a)-1}{2} = b \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'où $2b-a = 0, b = -\frac{1}{2}$, donc $P(x) = x - \frac{1}{2}$ est le seul polynôme de degré 1 qui vérifie (1).

2. (a) On va raisonner par récurrence sur $\deg P = p$.

Pour $p = 1$, d'après (II.1.a) la suite adaptée à P est $s_n = 1$.

Si $\deg P = p + 1$ vérifie (1) dont (s_n) est sa suite adaptée, alors d'après (I.2) P' vérifie (1) aussi dont la suite adaptée sera (ns_n) , or $\deg P' = p$, l'hypothèse de récurrence implique que : $ns_n = \frac{1}{n^{p-1}}$ d'où $s_n = \frac{1}{n^p}$.

(b) D'après (II.1.b) si $\deg P \leq 1$ alors $P(x) = 0$ ou bien $P(x) = x - \frac{1}{2}$, dans tous les cas $\int_0^1 P(t) dt = 0$.

3. $P(x) = \int_0^x Q(t) dt + C^{te}$, ainsi P est déterminé à constante près, or $\int_0^1 P(t) dt = 0$, donc la constante est unique.

(a)

(b) $B_1'(x) = B_0(x) = 1 \implies B_1(x) = x + b$, or $\int_0^1 B_1(t) dt = 0$, d'où $b = -\frac{1}{2}$. De plus $B_2'(x) = B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, donc $B_2(x) = x^2 - \frac{x}{2} + c$ tel que : $\int_0^1 B_2(t) dt = 0$, d'où $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + c = 0$, d'où $c = -\frac{1}{12}$, donc $B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$.

4. On fait les calculs à l'aide de Maple :

> B_2 : = x -> x^2/2 - x/2 + 1/12 ;

$$B_2 : = x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

> sum(B_2(x+k/n), k=0..n-1) ; ;

$$\frac{1}{2}x^2n - \frac{1}{2}xn + \frac{1}{12}n$$

> B_2(n*x) ;

$$\frac{1}{2}n^2x^2 - \frac{1}{2}n^2x + \frac{1}{12}n$$

On remarque alors que : $\sum_{k=0}^{n-1} B_2(x + \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}B_2(nx)$, donc B_2 vérifie (1) avec comme suite adaptée $s_n = \frac{1}{n}$.5. (a) On dérive, et comme $B_p' = B_{p-1}$, donc $(\varphi - \psi)'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}(x + \frac{k}{n}) - \frac{1}{n^{p-2}}B_{p-1}(nx) = 0$, car d'après (II.2.a) la suite adaptée à B_{p-1} est $s_n = \frac{1}{n^{p-2}}$ puisque c'est un polynôme de degré $p-1$ qui vérifie (1). Ainsi $(\varphi - \psi)' = 0$, donc $\varphi - \psi = C^{te}$.(b) On a : $\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} B_p(x + \frac{k}{n}) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} B_p(u) du$, en utilisant dans chaque intégrale le changement de variable $u = x + \frac{k}{n}$, et d'après la formule de Chasles on conclut que $\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \int_0^1 B_p(u) du$.D'autre part, à l'aide du changement de variable $u = nx$, on a : $\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{n} \psi(x) dx = \frac{1}{n^{p-2}} \int_0^1 B_p(u) du = 0$.(c) On a $\varphi - \psi = C^{te} = \lambda$, donc $\frac{\lambda}{n} = \int_0^{\frac{1}{n}} \lambda dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (\varphi - \psi)(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx - \int_0^{\frac{1}{n}} \psi(x) dx = 0$, d'où $\lambda = 0$, d'où $\varphi = \psi$ et donc B_p vérifie l'équation (1) avec comme suite adaptée $s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$.6. Raisonnons par récurrence sur $\deg P \in \mathbb{N}$.Si $\deg P = 0$ alors $P = \lambda = \lambda B_0$.Supposons le résultat vrai jusqu'au degré p et montrons le pour le degré $p+1$. Soit P polynôme de degré $p+1$ qui vérifie (1), alors P' est de degré p et vérifie aussi (1), donc $P' = \lambda B_{p-1} = \lambda B_p'$, d'où $P(x) = \lambda B_p(x) + C^{te} = \lambda B_p(x) + \mu$, P vérifie (1), donc $\sum_{k=0}^{n-1} P(x + \frac{k}{n}) = \frac{1}{n^{p-1}}P(nx)$, d'après (II.2.a),

donc $\sum_{k=0}^{n-1} B_p(x + \frac{k}{n}) + n\mu = \frac{1}{n^{p-1}}(B_p(nx) + \mu)$, or B_p aussi vérifie (1), d'où l'égalité $n\mu = \frac{\mu}{n^{p-1}}$ qui entra

Partie III : Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

- Il est clair que δ est linéaire parceque $\delta(\varphi + \lambda\psi)(x) = (\varphi + \lambda\psi)(x+1) - (\varphi + \lambda\psi)(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x) + \lambda(\psi(x+1) - \psi(x)) = \delta(\varphi)(x) + \lambda\delta(\psi)(x)$.
D'autre part $\varphi \in \delta \Leftrightarrow \varphi(x+1) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \varphi$ 1 - périodique.
 - Si P fonction polynômiale de degré n , alors $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, donc $\delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = a_n((x+1)^n - x^n) + a_{n-1}((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + a_1 = a_n((x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) + \dots + a_1 = na_n x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0$, d'où $\delta(P)$ est aussi une fonction polynômiale de degré $n-1$ et de coefficient dominant na_n .
- On a donc $s_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n})$, $s_n f(nx+1) = s_n f(n(x + \frac{1}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k+1}{n}) = \sum_{k=1}^n f(x + \frac{k}{n})$, donc $s_n \delta(f)(nx+1) = s_n f(nx) - s_n f(nx) = \sum_{k=1}^n f(x + \frac{k}{n}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = f(x+1) - f(x) = \delta f(x)$.
- Récurrence très facile à faire. $\alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k}) \implies \alpha^{k+1} g(x) = \alpha g(\frac{x}{2^k}) = g(\frac{x}{2^{k+1}})$, en utilisant l'égalité (3) pour $\frac{x}{2^{k+1}}$.
 - Si $\alpha = 0$, alors (3) $\implies g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $g = 0$.
 - Si $|\alpha| > 1$ alors (4) $\implies g(x) = \frac{1}{\alpha^k} g(\frac{x}{\alpha^k}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, or $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(\frac{x}{\alpha^k}) = g(0)$ car g continue donc $g(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha^k} g(\frac{x}{\alpha^k}) = g(0)$, d'autre part (3) implique pour $x = 0$ que $g(0) = 0$ d'où $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $g = 0$.
 - Si on dérive l'égalité p fois on trouve, $\beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x)$ avec $\beta = \alpha 2^p$, on alors $|\beta| > 1$ si on prend p assez grand tel que $p > -\frac{\ln|\alpha|}{\ln 2}$. Ainsi $g^{(p)}$ vérifie (3) avec $|\beta| > 1$ d'après (III.3.c) $g^{(p)} = 0$, donc g est polynômiale de degré inférieur à p .
 - g est soit nulle d'après (III.3.b) et (III.3.c) ou polynômiale d'après (III.3.d), dans tous les cas elle est polynômiale.
- D'après (2), en posant $g = \delta(f)$, $n = 2$ on a $s_2 g(2x) = g(x)$, donc g vérifie (3) avec $\beta = s_2$, donc est polynômiale d'après (III.3.e).
 - $\deg \delta(f) = q$, donc $\delta(f)(x) = a_q x^q + \dots + a_0$ avec $a_q \neq 0$, en comparant les coefficients de x^p dans l'égalité (2) on trouve $s_n a_q n^q = a_q$, d'où $s_n = \frac{1}{n^q}$. Ainsi $\delta(f)(nx) = n^p \delta(f)(x)$ ce qui donne $a_q n^q x^q + a_{q-1} n^{q-1} x^{q-1} + \dots + a_0 = n^q a_q x^q + n^q a_{q-1} x^{q-1} + \dots + n^q a_0$, en identifiant les coefficients de chaque puissance on trouve que $a_{q-1} = \dots = a_0 = 0$. D'où $\delta(f)(x) = a_q x^q$ avec $a_q \neq 0$.
 - On sait que B_p est polynômiale de degré p dont le coefficient est 1 donc $\delta(B_p)$ est aussi polynômiale de degré $p-1$ et de coefficient dominant égal à p d'après (III.1.b), d'autre part B_p vérifie (1) donc d'après la question précédente $\delta(B_p)(x) = px^{p-1}$.
 - $\delta(f - \lambda B_p) = \delta(f) - \lambda \delta(B_p) = ax^q - \lambda px^{p-1} = 0$, si on prend donc $q = p-1$, $a = \lambda p$, c'est à dire $p = q+1$, $\lambda = \frac{a}{p}$. En posant $h = f - \lambda B_p$, on a $\delta(h) = 0$ et d'après (III.1.a) on conclut que h est 1 - périodique, elle est aussi de classe \mathcal{C}^∞ comme différence de deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . La suite $s_n = \frac{1}{n^q}$ est à la fois adaptée à f et à B_p car $p-1 = q$ donc celle adaptée à $h = f - \lambda B_p$ est $\frac{1-\lambda}{n^q}$.

Partie IV : Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1- périodiques de E

1. (a) Comme g est 1-périodique alors $g(k) = g(0)$, il suffit donc de montrer que $g(0) = 0$, en effet $g(0) = g(n) \rightarrow 0$, donc $g(0) = 0$.
 - (b) $g(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2} + n) = g(\frac{2n+1}{2}) = g(\frac{N}{2}) \rightarrow 0$ quad $n \rightarrow +\infty$, d'où $g(\frac{1}{2}) = 0$. De même $g(\frac{p}{q}) = g(\frac{p}{q} + n) = g(\frac{pn+q}{q}) = g(\frac{N}{q}) \rightarrow 0$ quad $n \rightarrow +\infty$, d'où $g(\frac{p}{q}) = 0$.
 - (c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad r_n \in \mathbb{Q}$ tel que : $x = \lim_{+\infty} r_n$, or g est continue donc $g(r_n) \rightarrow g(x)$, en plus $g(r_n) = 0$ d'où $g(x) = 0$.
2. (a) Posons $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ d'où g est constante. En particulier $g(x) = g(0)$.
 - (b) $\frac{s_n}{n} f(nx) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) \rightarrow \int_0^1 f(x+t)dt$, d'après le théorème des sommes de Riemann, or $\int_0^1 f(x+u)du = \int_x^{x+1} f(t)dt = g(x) = g(0) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. $f(nx) = \frac{s_n}{n} f(nx) \frac{n}{s_n} \rightarrow \int_0^1 f(t)dt \times 0 = 0$, d'après (IV.1) on conclut que $f = 0$.
4. (a) On sait d'après (I.2) que si f vérifie (1) et a (s_n) comme suite adaptée alors f' vérifie aussi (1) et a (ns_n) comme suite adaptée, et par récurrence, $f^{(k+1)}$ vérifie (1) et a $(s'_n = n^{k+1}s_n)$ comme suite adaptée, et alors $\frac{s'_n}{n} \rightarrow +\infty$ et d'après (IV.3) on conclut que $f^{(k+1)} = 0$, donc f polynômiale de degré k .
 - (b) Posons $g(x) = f(x) - f(0)$, g est polynômiale de degré k tel que $g(0) = g(1) = \dots = g(k) = 0$, donc admet un nombre de racines supérieur à son degré, d'où $g = 0$ et donc f est constante.
5. Soit f solution de (1) d'après (III.4.d) $f - \lambda B_p$ est 1-périodique et vérifie (1), d'après (IV.4.b) $f - \lambda B_p = C^{te}$, donc f est polynômiale de degré p et vérifie (1) d'après (II.7) $f = \lambda B_p$.

FIN DU CORRIGÉ