CORRIGÉ DS 4
Fonctions réelles

Lundi le 10 Janvier 2005

Partie I : Résultats généraux et exemples d'éléments de E

1. f est non nulle, donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et soit $(s_n), (s'_n)$ deux suites adaptées à f, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, on a : $s_n f(nx) = s'_n f(nx)$, en particulier pour $x = \frac{x_0}{n}$ on aura $s_n f(nx_0) = s'_n f(nx_0)$, or $f(x_0) \neq 0$, d'où $s_n = s'_n$, donc la suite (s_n) est unique, d'autre part pour $n = 1, x = x_0$, on a : $f(x_0) = s_1 f(x_0)$, d'où $s_1 = 1$.

2. Si $f \in E$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = s_n f(nx)$, si on dérive cette égalité on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x + \frac{k}{n}) = ns_n f'(nx)$, donc $f' \in E$ et a (ns_n) comme suite adaptée.

3. Soit f une fonction constante de valeur a, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = na = nf(nx)$, donc $f \in E$ avec comme suite adaptée la suite $s_n = n$.

4. $A(x) = x - \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}) = n(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = n(x - \frac{1}{2}) + \frac{(n-1)n}{2n} == nx - \frac{1}{2} = A(nx)$, donc A vérifie (1) avec $s_n = 1$ comme suite adaptée.

5. Oui car il est d'abord non vide et stable pour les loi + et .

6. 1^{er} cas : $nx = p \in \mathbb{Z}$, alors $\chi(nx) = 1$, et $x + \frac{k}{n} = \frac{p+k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, ainsi on a exactement n entiers consécutifs qui sont $p, p+1, \dots, p+n-1$ parmi eux un seul est divisible par n, donc parmi les nombres $x + \frac{k}{n} = \frac{p+k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ un seul est dans $\mathbb{Z}$, d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x + \frac{k}{n}\right) = 1 = \chi(nx)$.
   $1^{\text{éme}}$ cas : $nx = p \notin \mathbb{Z}$, alors $\chi(nx) = 0$, supposons que $\exists k \in [|0, n-1|]$ tel que : $x + \frac{k}{n} = p \in \mathbb{Z}$, alors $nx = np - k \in \mathbb{Z}$, contradiction, et donc $\forall k \in [|0, n-1|] \quad x + \frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$, et par suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x + \frac{k}{n}\right) = 0 = \chi(nx)$.
   Conclusion : χ vérifie (1) avec comme suite adaptée $s_n = 1$.

7. (a) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})} = \mathrm{e}^{2ip\pi x}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ip\pi\frac{k}{n}} = \mathrm{e}^{2ip\pi x}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{a}^k$ avec $a = \mathrm{e}^{2ip\pi\frac{1}{n}}$.

   Si p est multiple de n alors $a = 1$, et donc $S = n\mathrm{e}^{2ip\pi x}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2p\pi(x + \frac{k}{n})) = \Re e(S) = n\cos(2p\pi x)$.

Sinon alors $S = e^{2ip\pi x}\dfrac{1-a^n}{1-a} = e^{2ip\pi x}\dfrac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{2ip\pi\frac{1}{n}}} = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2p\pi(x+\frac{k}{n})) = \Re e(S) = 0$.

(b) On applique la formule précédente pour $p = 1$, si $n = 1$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u(x+\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(2p\pi(x+\frac{k}{n})) = \cos(2\pi x) = s_1u(x)$ et pour $n \geq 2$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u(x+\frac{k}{n}) = 0$, donc u vérifie (1) avec comme suite adaptée la suite (s_n) tel que : $s_1 = 1, s_n = 0 \quad \forall n \geq 2$.

(c) On a $|\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)| \leq \frac{1}{2^q}$, donc le terme général de la série est majoré par celui d'une série de Riemann convergente, d'où la série de terme général $\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$ est normalement convergente. On peut en particulier permuter les sommes donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})),$$

or, en prenant $p = 2^q$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})) = 0$ si n ne divise pas 2^q, c'est à dire si n n'est pas un puissance de 2, on prend alors $s_n = 0$,

et si $n = 2^\alpha$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})) = 2^\alpha\cos(2^{q+1}\pi x \quad \forall q \geq \alpha$

et dans ce cas $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{k}{n})) = \sum_{q=\alpha}^{+\infty}\frac{1}{2^{q-\alpha}}\cos(2^{q+1}\pi x) = \sum_{q'=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{q'}}\cos(2^{q'+1}\pi nx) = v(nx)$, en faisant le changement de variable $p' = q-\alpha$ et en remplaçant 2^α par n, dans ce cas on prend $s_n = 1$.

Conclusion : la fonction v vérifie bien l'égalité (1) avec comme suite adaptée $s_n = 1$ si n est une puissance de 2 et $s_n = 0$ sinon.

Partie II : Recherche des polynômes éléments de E

1. (a) Posons $P(x) = ax+b$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}P(x+\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(ax+\frac{ak}{n}+b) = n(ax+b)+\frac{a(n-1)}{2} = anx+\frac{n(2b-a)-1}{2} = s_nP(nx) = s_nanx+s_nb \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $s_n = 1$.

   (b) D'aprés la formule précédente on a aussi $\frac{n(2b-a)-1}{2} = b \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'où $2b-a = 0, b = -\frac{1}{2}$, donc $P(x) = x-\frac{1}{2}$ est le seul polynôme de dégré 1 qui vérifie (1).

2. (a) On va raisonner par récurrence sur $\deg P = p$.
   Pour $p = 1$, d'aprés (II.1.a) la suite adaptée à P est $s_n = 1$.
   Si deg $P = p+1$ vérifie (1) dont (s_n) est sa suite adaptée, alors d'aprés (I.2) P' vérifie (1) aussi dont la suite adaptée sera (ns_n), or deg $P' = p$, l'hypothèse de récurrence implique que : $ns_n = \frac{1}{n^{p-1}}$ d'où $s_n = \frac{1}{n^p}$.

   (b) D'aprés (II.1.b) si $\deg P \leq 1$ alors $P(x) = 0$ ou bien $P(x) = x-\frac{1}{2}$, dans tous les cas $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t=0$.

3. $P(x) = \displaystyle\int_0^x Q(t)\partial t + C^{te}$, ainsi P est déterminé à constante prés, or $\displaystyle\int_0^1 P(t)\partial t = 0$, donc la constante est unique.

(a)

(b) $B_1'(x) = B_0(x) = 1 \implies B_1(x) = x + b$, or $\displaystyle\int_0^1 B_1(t) = 0$, d'où $b = -\frac{1}{2}$. De plus $B_2'(x) = B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, donc $B_2(x) = x^2 - \frac{x}{2} + c$ tel que : $\displaystyle\int_0^1 B_2(t) = 0$, d'où $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + c = 0$, d'où $c = -\frac{1}{12}$, donc $B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$.

4. On fait les calculs à l'aide de Maple :

```
> B_2 : =x->x^2/2-x/2+1/12;
```

$$B\_2 := x \to \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

```
> sum(B_2(x+k/n),k=0..n-1);;
```

$$\frac{1}{2}x^2 n - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{12}}{n}$$

```
> B_2(n*x);
```

$$\frac{1}{2}n^2 x^2 - \frac{1}{2}n x + \frac{1}{12}$$

On remarque alors que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_2(x + \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}B_2(nx)$, donc B_2 vérifie (1) avec comme suite adaptée $s_n = \frac{1}{n}$.

5. (a) On dérive, et comme $B'p = B_{p-1}$, donc $(\varphi - \psi)'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}(x + \frac{k}{n}) - \frac{1}{n^{p-2}}B_{p-1}(nx) = 0$, car d'aprés (II.2.a) la suite adaptée à B_{p-1} est $s_n = \frac{1}{n^{p-2}}$ puisque c'est un polynôme de degré $p - 1$ qui vérifie (1). Ainsi $(\varphi - \psi)' = 0$, donc $\varphi - \psi = C^{te}$.

(b) On a : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\mathrm{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} B_p(x + \frac{k}{n})\mathrm{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} B_p(u)\mathrm{du}$, en utilisant dans chaque intégrale le changement de variable $u = x + \frac{k}{n}$, et d'aprés la formule de *Chasles* on conclut que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 B_p(u)\mathrm{du}$.

D'autre part, à l'aide du changement de variable $u = nx$, on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 = \frac{1}{n^{p-2}}\int_0^1 B_p(u)\mathrm{du} = 0$.

(c) On a $\varphi - \psi = C^{te} = \lambda$, donc $\frac{\lambda}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \lambda\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{n}} (\varphi - \psi)(x)\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\mathrm{dx} - \int_0^{\frac{1}{n}} \psi(x)\mathrm{dx} = 0$, d'où $\lambda = 0$, d'où $\varphi = \psi$ et donc B_p vérifie l'équation (1) avec comme suite adapté $s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$.

6. Raisonnons par récurrence sur $\deg P \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = 0$ alors $P = \lambda = \lambda B_0$.
Supposons le résultat vrai jusqu'au degré p et montrons le pour le degré $p + 1$. Soit P polynôme de degré $p + 1$ qui vérifie (1), alors P' est de degré p et vérifie aussi (1), donc $P' = \lambda B_{p-1} = \lambda B_p'$, d'où $P(x) = \lambda B_p(x) + C^{te} = \lambda B_p(x) + \mu$, P vérifie (1), donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(x + \frac{k}{n}) = \frac{1}{n^{p-1}}P(nx)$, d'aprés (II.2.a),

donc $\sum_{k=0}^{n-1} B_p(x+\frac{k}{n})+n\mu=\frac{1}{n^{p-1}}(B_p(nx)+\mu)$, or B_p aussi vérifie (1), d'où l'égalité $n\mu=\frac{\mu}{n^{p-1}}$ qui entra

Partie III : Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

1. (a) Il est clair que δ est linéaire parceque $\delta(\varphi+\lambda\psi)(x)=(\varphi+\lambda\psi)(x+1)-(\varphi+\lambda\psi)(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)+\lambda(\psi(x+1)-\psi(x))=\delta(\varphi)(x)+\lambda\delta(\psi)(x)$.
D'autre part $\varphi\in\delta\Leftrightarrow\varphi(x+1)=\varphi(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\varphi$ 1 - périodique.
   (b) Si P fonction polynômiale de degré n, alors $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots a_0$, avec $a_n\neq 0$, donc $\delta(P)(x)=P(x+1)-P(x)=a_n((x+1)^n-x^n)+a_{n-1}((x+1)^{n-1}-x^{n-1})+\dots a_1=a_n((x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}x+\dots+x^{n-1})+\dots a_1=na_nx^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots b_0$, d'où $\delta(P)$ est aussi une fonction polynômiale de degré $n-1$ et de coéfficient dominant na_n.

2. On a donc $s_nf(nx)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}), s_nf(nx+1)=s_nf(n(x+\frac{1}{n}))=\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k+1}{n})=\sum_{k=1}^{n} f(x+\frac{k}{n})$, donc $s_n\delta(f)(nx+1)=s_nf(nx)-s_nf(nx)=\sum_{k=1}^{n} f(x+\frac{k}{n})-\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n})=f(x+1)-f(x)=\delta f(x)$.

3. (a) Récurrence trés facile à faire. $\alpha^kg(x)=g(\frac{x}{2^k})\implies\alpha^{k+1}g(x)=\alpha g(\frac{x}{2^k})=g(\frac{x}{2^{k+1}})$, en utilisant l'égalité (3) pour $\frac{x}{2^{k+1}}$.
   (b) Si $\alpha=0$, alors (3) $\implies g(x)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, d'où $g=0$.
   (c) Si $|\alpha|>1$ alors (4) $\implies g(x)=\frac{1}{\alpha^k}g\left(\frac{x}{\alpha^k}\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$, or $\lim_{k\to\to+\infty} g\left(\frac{x}{\alpha^k}\right)=g(0)$ car g continue donc $g(x)=\lim_{k\to\to+\infty} g(x)=\lim_{k\to\to+\infty}\frac{1}{\alpha^k}g\left(\frac{x}{\alpha^k}\right)=g(0)$, d'autre part (3) implique pour $x=0$ que $g(0)=0$ d'où $g(x)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, d'où $g=0$.
   (d) Si on dérive l'égalité p fois on trouve, $\beta g^{(p)}(2x)=g^{(p)}(x)$ avec $\beta=\alpha 2^p$, on alors $|\beta|>1$ si on prend p assez grand tel que $p>-\frac{\ln|\alpha|}{\ln 2}$. Ainsi $g^{(p)}$ vérifie (3) avec $|\beta|>1$ d'aprés (III.3.c) $g^{(p)}=0$, donc g est polynômiale de degré inférieur à p.
   (e) g est soit nulle d'aprés (III.3.b) et (III.3.c) ou polynômiale d'aprés (III.3.d), dans tous les cas elle est polynômiale.

4. (a) D'aprés (2), en posant $g=\delta(f), n=2$ on a $s_2g(2x)=g(x)$, donc g vérifie (3) avec $\beta=s_2$, donc est polynômiale d'aprés (III.3.e).
   (b) deg$\delta(f)=q$, donc $\delta(f)(x)=a_qx^q+\dots+a_0$ avec $a_q\neq 0$, en comparant les coefficients de x^p dans l'égalité (2) on trouve $s_na_qn^q=a_q$, d'où $s_n=\frac{1}{n^q}$. Ainsi $\delta(f)(nx)=n^p\delta(f)(x)$ ce qui donne $a_qn^qx^q+a_{q-1}n^{q-1}x^{q-1}+\dots+a_0=n^qa_qx^q+n^qa_{q-1}x^{q-1}+\dots+n^qa_0$, en identifiant les coefficients de chaque puisance on trouve que $a_{q-1}=\dots=a_0=0$. D'où $\delta(f)(x)=a_qx^q$ avec $a_q\neq 0$.
   (c) On sait que B_p est polynomiale de degré p dont le coefficient est 1 donc $\delta(B_p)$ est aussi polynômiale de degré $p-1$ et de coefficient dominant égal à p d'aprés (III.1.b), d'autre part B_p vérifie (1) donc d'aprés la question précédente $\delta(B_p)(x)=px^{p-1}$.
   (d) $\delta(f-\lambda B_p)=\delta(f)-\lambda\delta(B_p)=ax^q-\lambda px^{p-1}=0$, si on prend donc $q=p-1, a=\lambda p$, c'est à dire $p=q+1, \lambda=\frac{a}{p}$. En posant $h=f-\lambda B_p$, on a $\delta(h)=0$ et d'aprés (III.1.a) on conclut que h est 1 - périodique, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. La suite $s_n=\frac{1}{n^q}$ est à la fois adaptée à f et à B_p car $p-1=q$ donc celle adaptée à $h=f-\lambda B_p$ est $\frac{1-\lambda}{n^q}$.

Partie IV : Étude des fonctions indifiniment dérivables et 1- périodiques de E

1. (a) Comme g est 1-péridique alors $g(k) = g(0)$, il suffit donc de montrer que $g(0) = 0$, en effet $g(0) = g(n) \to 0$,donc $g(0) = 0$.

   (b) $g(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2} + n) = g(\frac{2n+1}{2}) = g(\frac{N}{2}) \to 0$ quad $n \to +\infty$, d'où $g(\frac{1}{2}) = 0$. De même $g(\frac{p}{q}) = g(\frac{p}{q} + n) = g(\frac{pn+q}{q}) = g(\frac{N}{q}) \to 0$ quad $n \to +\infty$, d'où $g(\frac{p}{q}) = 0$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad r_n \in \mathbb{Q}$ tel que : $x = \lim\limits_{+\infty} r_n$, or g est continue donc $g(r_n) \to g(x)$, en plus $g(r_n) = 0$ d'où $g(x) = 0$.

2. (a) Posons $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{dt}$, alors $g'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ d'où g est constante. En particulier $g(x) = g(0)$.

   (b) $\frac{s_n}{n} f(nx) = \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) \to \int_0^1 f(x+t)\mathrm{dt}$, d'aprés le thérème des sommes de Riemann, or $\displaystyle\int_0^1 f(x+u)\mathrm{du} = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{dt} = g(x) = g(0) = \int_0^1 f(t)\mathrm{dt}$.

3. $f(nx) = \frac{s_n}{n} f(nx) \frac{n}{s_n} \to \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{dt} \times 0 = 0$, d'aprés (IV.1) on conclut que $f = 0$.

4. (a) On sait d'aprés (I.2) que si f vérifie (1) et a (s_n) comme suite adaptée alors f' vérifie aussi (1) et a (ns_n) comme suite adaptée, et par récurrence, $f^{(k+1)}$ vérifie (1) et a $(s'_n = n^{k+1} s_n)$ comme suite adaptée, et alors $\frac{s'_n}{n} \to +\infty$ et d'aprés (IV.3) on conclut que $f^{(k+1)} = 0$, donc f polynômiale de degré k.

   (b) Posons $g(x) = f(x) - f(0)$, g est polynômiale de degré k tel que $g(0) = g(1) = \dots g(k) = 0$, donc admet un nombre de racines supérieur à son degré, d'où $g = 0$ et donc f est constante.

5. Soit f solution de (1) d'aprés (III.4.d) $f - \lambda B_p$ est 1-périodique et vérifie (1), d'aprés (IV.4.b) $f - \lambda B_p = C^{te}$, donc f est polynômiale de degré p et vérifie (1) d'aprés (II.7) $f = \lambda B_p$.

FIN DU CORRIGÉ