Contrôle : *Fonctions réelles*

MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et f_p est la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par $f_p(x) = x^p + p\,x$.

1. *(0.25 pts)* Préciser les variations de la fonction f_p sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f_p est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

Pour tout entier $p \geq 2$, on notera g_p l'application réciproque de f_p, c'est-à-dire $g_p = (f_p)^{-1}$, et on notera α_p l'unique solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^p + p\,x = 1$, autrement dit $\alpha_p = g_p(1)$. Le but du problème est de décrire une méthode de calcul approché de α_p.

2.a. *(0.25 pts)* Quelles sont les variations de la fonction g_p sur $\mathbb{R}_+$?

b. *(0.5 pts)* Montrer que la fonction g_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $y \geq 0$, exprimer $g_p'(y)$ en fonction de $g_p(y)$.

c. *(0.25 pts)* Montrer que $g_p(y) \sim \sqrt[p]{y}$ lorsque y tend vers $+\infty$
On pourra faire le changement de variable $y = f(x)$).

Pour tout entier $p \geq 2$ fixé et pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$\varphi_p(x) = \frac{(p-1)\,x^p + 1}{p\,(x^{p-1} + 1)} .$$

3.a. *(0.75 pts)* Vérifier, pour tout $x \geq 0$, la relation $\varphi_p(x) - x = \dfrac{1 - f_p(x)}{f_p'(x)}$.

En déduire l'étude du signe de $\varphi_p(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Quels sont les points fixes de la fonction φ_p ?

b. *(0.5 pts)* Étudier les variations de φ_p
On vérifiera notamment que la fonction φ_p présente un extremum local au point α_p.
Dresser un tableau de variations de φ_p en précisant les limites aux bornes.

4. Dans cette question, on fixe toujours $p \geq 2$ et on considère la suite (u_n) initialisée par $u_0 = \dfrac{1}{p}$ et satisfaisant à la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi_p(u_n)$.

a. *(0.25 pts)* Vérifier que $\alpha_p < \dfrac{1}{p}$.

b. *(0.25 pts)* Démontrer la relation $\forall x \in \left[\alpha_p, \dfrac{1}{p}\right] \quad |\varphi_p'(x)| \leq \dfrac{p-1}{p}$.
Indication : On vérifiera que $0 \leq x^p + px - 1 \leq x^p$ sur l'intervalle considéré.

c. *(0.5 pts)* Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha_p| \leq \frac{p-1}{p}\,|u_n - \alpha_p| .$$

d. *(0.5 pts)* Donner une majoration de $|u_n - \alpha_p|$.
En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \alpha_p$.

5. Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 2}$.

a. *(0.25 pts)* Montrer que $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} \alpha_p = 0$.

b. *(0.25 pts)* Montrer que, pour tout $p \geq 2$, on a :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_{p+1}(x) \geq f_p(x) .$$

On pourra procéder par récurence sur p.

c. *(0.25 pts)* En déduire que la suite (α_p) est décroissante.

d. *(0.5 pts)* En utilisant la question **4.a.**, montrer que $(\alpha_p)^p = o(p\,\alpha_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

De la relation $\alpha_p^p + p\,\alpha_p = 1$, déduire un équivalent de α_p lorsque p tend vers $+\infty$.