*La calculatrice n'est* ***pas autorisée****. Les résultats seront encadrés, les justifications claires et précises.*

**Exercice 1** On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **continues en 0** et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ [1 - f(x)f(y)]\, f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\heartsuit).$$

Dans les questions **1** à **7**, on suppose que la fonction considérée $f$ vérifie les conditions précédentes.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer, à l'aide du critère séquentiel de la continuité, que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer[1] que, si $f$ admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est nécessairement 0.
4. Montrer que $f$ est impaire.
5. On note $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.
   (a) Montrer [2] que $A$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in A$, $\dfrac{x}{2} \in A$.
6. **Dans cette question, on suppose que $A = \{0\}$.**
   (a) Montrer que, si il existe un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) > 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) > 0$.
   (b) Que peut-on dire si : $\exists a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) < 0$ ?
   (c) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Montrer que $f(x) - f(y)$ est du signe de $f(x-y)$.
   On rappelle que $f$ est impaire.
   (d) En déduire que $f$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (e) En utilisant la question **3**, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
7. (a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ dans $A$.
   (b) On fixe donc un réel $a \in A \cap \mathbb{R}^{+*}$ (c'est possible d'après la question précédente).
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\dfrac{a}{2^n}\right) \in A$.
   Puis montrer que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \left(\dfrac{ma}{2^n}\right) \in A$.
   (c) Soit $x > 0$, un réel fixé. On définit la suite $y = (y_n)_{n \geq 0}$ par : $y_n = \dfrac{aE\left(\frac{2^n x}{a}\right)}{2^n}$, où $E$ désigne la fonction partie entière. Montrer que la suite $y = (y_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite. En déduire que $x \in A$.
8. Conclure.
9. QUESTION A TRAITER CHEZ SOI (ou si tout le reste du devoir a été traité) : montrer que, si on avait fait l'hypothèse que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $(\heartsuit)$, alors le résultat est presque immédiat.

[1] On utilisera, en le justifiant, que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[1 - f^2(x)\right] f(2x) = 2f(x)$.

[2] Rappel : cela revient à prouver que $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ puis que $A$ est stable par $+$ et par passage à l'opposé. Autrement dit : $\forall a, b \in A,\ a + b \in A$ et $-a \in A$.