(1) En prenant $x = y = 0$, l'équation devient : $(1 - f(0)^2)f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = -f(0)^3$, d'où $f(0)(1 + f(0)^2)$, donc enfin $f(0) = 0$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et (x_n) tel que $\lim x_n = x$, montrons que $\lim f(x_n) = f(x)$, posons $\varepsilon_n = x_n - x$, donc $\lim \varepsilon_n = 0$, or f est continue en 0, donc $\lim f(\varepsilon_n) = f(0) = 0$, d'autre part en prenant $y = -x$ dans l'équation on trouve que $f(-x) = -f(x)$, puisque $f(0) = 0$, donc $f(x_n) - f(x) = f(x_n) + f(-x) = (1 - f(x_n)f(-x))f(x_n - x) \longrightarrow 0$.

(3) Posons $l = \lim f$ on fait tendre x et y vers $+\infty$ dans l'quation on obtient alors $(1 - l^2)l = 2l$, comme dans 1) on trouve $l = 0$.

(4) Prendre $y = -x$ dans l'équation et utiliser 1) $f(0) = 0$.

(5) (a) $0 \in A$ car $f(0) = 0$, d'autre part soit $x, y \in A$, montrons que $x - y \in A$, en effet comme $f(x) = f(y) = 0$ et $f(-y) = -f(y)$ l'équation devient dans ce cas $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, d'où $x - y \in A$.

(b) En premplaçant dans l'équation x et y par $\dfrac{x}{2}$, on obtient $2f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] f(x) = 0$.

(6) (a) Supposons que $\exists b > 0, b \neq a$ tel que $f(b) < 0$, d'aprés le TVI, puisque f est continue, il existe $c > 0$ compris entre a et b tel que $f(c) = 0$, donc $c \in A = \{0\}$ contrdaiction.

(b) De même si $\exists a > 0$ tel que $f(a) < 0$, alors $f(x) < 0$, $qlqx > 0$.