.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Contrôle 2: *Récurrence, sommes Limites, continuité*

Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat

Jeudi, le 16 Octobre 2008.
Durée : 1heure

Blague du jour :
Il existe des questions auxquelles ni la Science, ni la Philosophie n'ont encore le courage de tenter de répondre. Vous, peut-être ?...
• On dit que seulement dix personnes au monde comprenaient Einstein. • Personne ne me comprend. Suis-je un génie ?
Si Superman est tellement malin, pourquoi est-ce qu'il met son slip par-dessus son pantalon ?

Présentation et rédaction : 2 points.

Exercice 1 .

1) **(1pt) Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la continuité de la fonction suivante définie par $f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$.**
2) **(1pt) Donner l'allure de sa courbe.**

Exercice 2 **. Formule du binôme de Newton.**
On rappelle les notations suivantes :

– **Factoriels :** $n! = 1 \times \cdots \times n$ **si** $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $0! = 1$.
– **Combinaison** $\mathcal{C}_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ **quand** $n \geq p$.
– $x^0 = 1$**, en particulier** $0^0 = 1$.

1) **(0.5pt) Exprimer** $(n+1)!$ **en fonction de** $n!$.
2) **(0.5pt) Donner** $\mathcal{C}_n^p$ **pour** $p \in \{0, 1, 2\}$.
3) **(1pt) Montrer que** $\mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_n^{n-p}$**, en déduire** $\mathcal{C}_n^p$ **pour** $p \in \{n, n-1, n-2\}$.
4) **(1 pt) Montrer que** $\mathcal{C}_n^p + \mathcal{C}_n^{p+1} = \mathcal{C}_{n+1}^{p+1}$. **(*Formule du triangle de Pascal*).**
5) **(2pt) En déduire la formule suivante dite *binôme de Newton* :**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p a^p b^{n-p} \quad (a, b) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

6) **Simplifier les sommes suivantes :**
   a) **(0.5pt)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p$.
   b) **(0.5pt)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p (-1)^p$.
   c) **(1pt)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\mathcal{C}_n^p$.

Fin
Bonne chance