.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Contrôle 2 : *Récurrence et sommes*
Limites et continuité
Dérivées et Primitives

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Lundi 13 Octobre 2008

Durée : 2 heures

La blague du jour. ***source : site internet***
Un prof de Math explique les limites à sa grande mère. Il résout avec elle l'exercice suivant : $\lim\limits_{8} \dfrac{1}{x-8} = \infty$. À la fin de l'exercice, il lui demande si elle a tout compris : "Oh oui ! J'ai tout compris !" N'y croyant qu'à moitié, il lui pose l'exercice suivant : Déterminer $\lim\limits_{1} \dfrac{1}{x-1}$. Elle lui répond rapidement d'un ton moqueur $\lim\limits_{1} \dfrac{1}{x-1} = \leftharpoondown$

Présentation et rédaction : 4 points.

Exercice 1 . ***source : une de mes braves élèves.***

1) *(1pt)* **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^* :\ n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k$.

2) *(2pts)* **En déduire que** $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ **on a :** $(1+a)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(na)^k}{k!}$.

Exercice 2 . (Fonction d'Ackerman) ***source : la même brave élève.***
On apelle fonction d'Ackerman, toute focntion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ **vérifiant les propriétés suivantes :**

- **i)** $f(0,n) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- **ii)** $f(m,0) = f(m-1,1) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$.
- **iii)** $f(m,n) = f(m-1, f(m,n-1)) \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, **on a les propriétés suivantes :**

1) *(1pt)* $f(1,k) = k+2$.

2) *(1.5pt)* $f(2,k) = 2k+3 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

3) *(1.5pt)* $f(3,k) = 2^{k+3} - 3 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 . *source : encore une autre fois, PCSI-France.*

On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ **pour tout réel** x **différent de 1.**

Pour $x \in \mathbb{R}$ **et** $n \in \mathbb{N}$**, on pose** $E_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$**.**

1. *(1pt)* **Étudier les variations et les limites de** f**, construire sa courbe représentative.**

2. *(1.5pt)* **Montrer que, pour tout entier naturel** n**, on peut écrire**

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}} P_n(x) \ ,$$

où P_n **est une fonction polynôme ; on exprimera** $P_n(x)$ **à l'aide de** $P_{n-1}(x)$ **et** $P'_{n-1}(x)$**.**

3. *(1pt)* **Calculer** $P_n(1)$**.**

(1pt) **Quel est le terme dominant (terme de plus haut degré) du polynôme** P_n **?**

4. *(1.5pt)* **En dérivant** n **fois la relation** $(1-x)\, f(x) = e^x$**, démontrer la relation**

$$P_n(x) = n!\, E_n(1-x) \ .$$

5. On pose $F_n(x) = e^x\, E_n(-x)$ **pour** $n \in \mathbb{N}$ **et** $x \in \mathbb{R}$**.**

(1pt) **Prouver la relation :** $F_n(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x e^t \, \frac{(-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t$.

(1pt) **En déduire les variations et les limites à l'infini de la fonction** F_n **(discuter selon la parité de** n**).**

(1pt) **Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation** $P_n(x) = 0$ **?**

Fin

Bonne chance