.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé du Contrôle 2 : *Récurrence et sommes Limites et continuité Dérivées et Primitives*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Lundi 13 Octobre 2008

Durée : 2 heures

Exercice 1 .

1) **Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixe (c'est un récurrence double).**
Pour $k = 1$ le résultat est évidement vrai.
Supposons $n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k$, donc $n^{k+1} + kn^k \leq n(n+1)^k$, d'où
$n^{k+1} + (k+1)n^k \leq n(n+1)^k + n^k \leq n(n+1)^k + (n+1)^k = (n+1)^{k+1}$.

2) **On va encore raisonner par récurrence, mais cette fois simple st sur $n \in \mathbb{N}$.**
Pour $n = 0$, le résultat est évidement vrai.
Supposons que $(1+a)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(na)^k}{k!}$, donc

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} \leq\ & (1+a)\sum_{k=0}^{n} \frac{(na)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(na)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k a^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(na)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n^{k-1}a^k}{(k-1)!} \\
=\ & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k(n^k + kn^{k-1})}{k!} + \frac{(na)^0}{0!} + \frac{n^n a^{n+1}}{n!} \\
\leq\ & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k(n+1)^k}{k!} + \frac{((n+1)a)^0}{0!} + \frac{n^{n+1}a^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k(n+1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Exercice 2 .

1) **Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.**
Pour $k = 0$, on a $f(1,0) = f(0,1) = 2$.
Supposons que $f(1,k) = k+2$, donc $f(1,k+1) = f(0, f(1,k)) = f(0,k+1) = k+2$.

2) **Encore par récurrence, en utilisant la relation : $f(2,k+1) = f(1, f(2,k)) = f(1, 2k+3) = 2k+5 = 2(k+1)+3$.**

3) **Le principe est toujours le même, par récurrence avec $f(3,k+1) = f(2, f(3,k)) = f(2, 2^{k+3}-3) = 2(2^{k+3}-3)+3 = 2^{k+4}-3$.**

Exercice 3 .
1. $f'(x) = \dfrac{(2-x)\,e^x}{(x-1)^2}$ **est du signe de** $2-x$**,** $\lim\limits_{-\infty} f = 0, \lim\limits_{1^-} f = +\infty, \lim\limits_{1^+} f = -\infty, \lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.
2. On raisonne par récurrence. C'est vrai pour $n=0$ **avec** $P_0(x) = 1$**.**
Supposons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}}\, P_n(x) \tag{1}$$

. Aprés dérivation et simplification, on obtient : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^{n+2}}\left((n+2-x)\,P_n(x) + (1-x)\,P_n'(x)\right) = \dfrac{e^x}{(1-x)^{n+2}} P_{n+1}(x)$ **avec**

$$P_{n+1}(x) = (n+2-x)\,P_n(x) + (1-x)\,P_n'(x) \tag{2}$$

cette dernière formule nous permet de justifier par récurrence que P_n **est une fonction polynomiale.**
3. En remplaçant x **par 1 dans la formule 2, on obtient** $P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$**, de même** $P_n(1) = nP_{n-1}(1), \cdots, P_1(1) = P_0(1)$**, ce qui nous permet de montrer par récurrence que** $P_n(1) = n!$**.**
Toujours d'après 2, on remarque que $co(P_{n+1}) = -co(P_n)$ **où** $co(P)$ **désigne le coéfficient dominant pour chaque fonction polynômiale** P**, ainsi** $(co(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite géomètrique de raison -1, d'où** $co(P_n) = (-1)^n co(P_0) = (-1)^n$**, car** $P_0 = 1$**.**
4. D'après la formule de Leibniz, on a $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k (1-x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$**, or** $(1-x)^{(0)} = 1-x, (1-x)^{(1)} = -1, (1-x)^{(k)} = 0,\ \forall k \geq 2$**, d'où** $e^x = (1-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$**. En utilisant 1, on obtient :** $(1-x)^n = P_n(x)(x) - nP_{n-1}(x)$**, d'où** $\dfrac{P_n(x)}{n!} - \dfrac{P_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \dfrac{(1-x)^n}{n!}$**, à l'aide de cette forumle de somme téléscopique, on montre que** $\dfrac{P_n(x)}{n!} - \dfrac{P_0(x)}{0!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(1-x)^n}{n!} = E_n(1-x) - 1$**, d'où le résultat.**
5. Remarquons d'abord que $E_n'(x) = E_{n-1}(x)$**, donc** $F_n'(x) = (e^x\, E_n(-x))' = e^x E_n(-x) - e^x E_{n-1}(-x) = e^x(E_n(-x) - E_{n-1}(-x)) = e^x \dfrac{(-x)^n}{n!}$**, or** $F_n(0) = 1$**, d'où** $F_n(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x e^t\, \frac{(-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t$.
les variations de F_n **: on a** $F'n(x) = e^x \dfrac{(-x)^n}{n!}$ **est toujours positif si** n **pair, mais change de signe en 0 si** n **est impair.**
Limites à l'infini : $E_n(-x)$ **est une fonction polynômiale, donc négligeable devant** e^x **à l'infini, d'où** $\lim\limits_{-\infty} F_n(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{+\infty} F_n(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.
Nombres de racines : on va distinguer deux cas :
1ér cas : n **pair, on a** F_n **croissante sur** $\mathbb{R}$**,** $\lim\limits_{-\infty} F_n(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{+\infty} F_n(x) = +\infty$**, donc** F **ne s'annulle jamais.**
2ème cas : n **impair, on a** F_n **décroissante sur** $]-\infty, 0]$ **puis croissante sur** $[0, +\infty[$ **avec** $\lim\limits_{-\infty} F_n(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{+\infty} F_n(x) = +\infty$**, donc** F **s'annulle une seule fois sur** $\mathbb{R}$**, plus précisement sur l'intervalle** $]-\infty, 0]$ **parceque** $F_n(0) = 1$**.**

Fin
à la prochaine