بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

CPGE My Youssef, Rabat

DL 16 (08-09): *Fonctions réelles*

26 mars 2009

Blague du jour :
Bientôt (dans 4ans au moins) vous serez ingenieur, peut être ingeénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont :
- **L'ingénieur SERVEUR WEB : Toujours occupé quand vous avez besoin de lui.**
- **L'ingénieur MULTIMEDIA : Il sait rendre jolies des choses dénuées d'intérêt.**
- **L'ingénieur EXCEL : On dit d'elle qu'il peut faire énormément de choses, mais vous l'employez surtout pour gérer votre planning.**
- **L'ingénieur Courrier électronique : Sur dix choses qu'il raconte, neuf sont des pures conneries.**
- **L'ingénieur VIRUS : Quand vous ne l'attendez pas, il arrive, s'installe et utilise toutes vos ressources. Si vous essayez de s'en débarasser, vous perdez forcément quelque chose. Et si vous n'essayez, vous perdez tout.**

Mathématicien du jour ***l'Hôpital***
Guillaume François Antoine de l'Hôpital, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieux (1661-1704) était un mathématicien français. Il est sûrement le plus connu pour la règle qui porte son nom. Il est aussi l'auteur du premier livre connu sur le calcul infinitésimal différentiel, publié en 1696, ses textes comportent des conférences de son professeur Jean Bernoulli. C'est d'ailleurs ce dernier qui a donné au marquis toutes les données nécessaires pour réaliser le livre au nom de l'Hôpital, dans un le but de le publier sous un nom français, car Bernoulli est Suisse.

PROBLÉME. **Source : DL, MPSI, France.**

Etude d'une suite définie implicitement

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^p + x^{p-1} + \cdots + x^2 + x = 1$.

1.a En étudiant la fonction $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_p(x) = x^p + x^{p-1} + \cdots + x^2 + x$, montrer que l'équation possède une unique solution positive x_p.

1.b Justifier que $x_p \in]0,1]$ et qu'on a la relation $x_p(1 - x_p^p) = 1 - x_p$.

1.c Etablir que la suite (x_p) est décroissante puis convergente.

1.d Etablir que $x_p^p \to 0$ et en déduire la limite de (x_p).

. 2. On écrit $x_p = \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon_p\right)$ avec $\varepsilon_p \to 0$.

2.a En observant que $(1+\varepsilon_p)^{p+1} = 2^{p+1}\varepsilon_p$,
établir la relation $(p+1)\varepsilon_p \ln(1+\varepsilon_p) = (p+1)\varepsilon_p \ln 2 + \varepsilon_p \ln \varepsilon_p$.

2.b Déterminer alors la limite de $(p+1)\varepsilon_p$ puis celle de $(1+\varepsilon_p)^{p+1}$.

2.c En déduire un équivalent simple de (ε_p).

3. Dans cette question, on suppose $p = 2$.
Par commodité on note $\alpha = x_2$ au lieu de x_2.

On considère la fonction réelle f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

3.a Simplifier $f(\alpha)$.

3.b Montrer que si $x \in [1/2, 1]$ alors $f(x) \in [1/2, 1]$.

3.c On considère la suite récurrente réelle (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Justifier $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|$.

3.d En déduire : $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$,
et déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $a = 1$.
Par commodité, on pose $\beta = x_3$.

On introduit la fonction réelle g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ et on considère la suite récurrente réelle (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$.

4.a Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$.

4.b Justifier que (v_{2n}) est décroissante, que (v_{2n+1}) est croissante puis que ces deux suites sont convergentes.

4.c On pose $\ell = \lim v_{2n}$ et $\ell' = \lim v_{2n+1}$.

Etablir $g(\ell) = \ell'$ et $g(\ell') = \ell$.

4.d En déduire que ℓ est solution de l'équation : $(\ell^2 + 1)(\ell^3 + \ell^2 + \ell - 1) = 0$.

4.e Conclure que $\ell = \beta$, $\ell' = \beta$ puis déterminer la nature (v_n).

Fin
à la prochaine