MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

EXERCICE : Interpollation, méthode des trapèzes.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$ dont on admet l'existence d.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$. On dit que φ interpolle f aux point a et b.

Expliciter $\varphi(t)$ pour $t \in [a,b]$.

2. Étudier la convexite des fonctions $g(t) = f(t) - \varphi(t) - M(t-a)(t-b)$ et $h(t) = f(t) - \varphi(t) + M(t-a)(t-b)$.

3. En déduire la majoration de l'erreur commise en remplaçant l'arc de courbe par sa corde sur le segment $[a,b]$:

$\forall\, x \in [a,b],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

4. En déduire $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$.

Pourquoi parle on ici de méthode des trapèzes.

PROBLÈME

I. Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application f qui, à tout réel t, associe$f(t) = \dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1}$.

1. Justifier l'existence de F ; Y a-t-il unicité d'une telle fonction F ?

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)$. Calculer la dérivée de g ; en déduire que g est une fonction affine sur l'intervalle I.

3. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 2t + 1}$.

II. Pour tous p et q entiers naturels non nuls, on pose

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. En majorant convenablement l'expression $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$, donner une majoration de $I(n,n)$. En déduire la limite de $I(n,n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Montrer la relation : $\forall\, p, q \in \mathbb{N}^*,\ I(p+1, q+1) = \dfrac{q+1}{p+2}\, I(p+2, q)$.

3. En déduire que, pour tout n entier naturel non nul, on a

$$I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

III.1 Pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k\,(k!)^2}{(2k+1)!}$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Fin.