بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 2 Bis: *Dérivées, primitives*

17 octobre 2008

Blague du jour :
Il existe des questions auxquelles ni la Science, ni la Philosophie n'ont encore le courage de tenter de répondre. Vous, peut-être ?...
- **Pourquoi le mot abréviation est il si long ?**
- **Pourquoi est-ce que les kamikazes portaient des casques ?**

Exercice 1 . **source : DL PCSI, France, 2002-2003.**

Soit $f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$ **.**

1. Montrer que f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $]-1,1[$ **, et que sa dérivée** n**-ième (**$n \in \mathbb{N}$**), s'écrit**

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

On écrira une relation exprimant le polynôme P_{n+1} **en fonction du polynôme** P_n **et de sa dérivée.**
Montrer que $P_n(x)$ **est une fonction polynômiale de même parité que l'entier** n **et dont le terme dominant (terme de plus haut degré) est** $n!x^n$**.**
2. Vérifier la relation

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0 \ .$$

En utilisant la formule de Leibniz, en déduire que

$$\forall x \in]-1,1[\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) \ .$$

3. En déduire la valeur de $P_n(0)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$
(on distinguera les cas $n = 2p$ **et** $n = 2p+1$**, et on utilisera des factorielles).**
4. À l'aide des questions 1. et 2., montrer que

$$\forall x \in]-1,1[\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$$

puis, pour $k \in \{0,\dots,n\}$**, exprimer** $P_n^{(k)}$ **à l'aide de** P_{n-k}**.**
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$**, on note** $P_n(X) = a_{n,n}X^n + a_{n,n-1}X^{n-1} + \cdots + a_{n,1}X + a_{n,0}$ **, avec** $a_{n,n} = n!$ **.**
Montrer que $\forall k \in \{0,\dots,n\} \quad a_{n,k} = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$**.**
En déduire le coefficient $a_{n,n-2p}$ **pour tout** p**,** $0 \le p \le E\left(\frac{n}{2}\right)$**.**

Fin