بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS 1: *Dérivées, primitives Fonctions usuelles*

Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat

Lundi, le 20 Octobre 2008.
Durée : 3heures

Blague du jour :
Il existe des questions auxquelles ni la Science, ni la Philosophie n'ont encore le courage de tenter de répondre. Vous, peut-être ?...
- **Si un chat retombe toujours sur ses pattes, et une tartine beurrée retombe toujours du côté du beurre, que se passe-t-il quand on attache une tartine beurrée sur le dos d'un chat et qu'on les jette par la fenêtre ?**
- **De quelle couleur est un caméléon quand il se regarde dans la glace ?**

Gottfried Wilhelm von Leibniz (allemand, 1646-1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi. Orphelin de mère à 6 ans, il fût élevé par son père. Il posa avec Isaac Newton les bases du calcul intégral et différentiel. Son oeuvre principale est la *monadologie*, où il présenta en 1714 les principes de base de ses pensées.

Présentation et rédaction : 2 points.

Exercice 1 .
source : colle MPSI, France.

On rapelle les et propriètés suivantes :
- $\mathcal{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ **pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$.**
- $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ **(*formule de Leibniz*)**
- $(x^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$**, pour tous entiers n et k tels que $n \geq k$.**

1) **(2pt) En dérivant n-fois à l'aide de la formule de Leibniz, la relation $x^{2n} = x^n.x^n$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\mathcal{C}_n^k\right)^2$.**
2) **(1pt) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x\right)^{(n)} = 2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$.**
Indication : on pourra raisonner par récurrence.

Exercice 2 . **source : colle PCSI, France.**

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arccos(\tanh x) \qquad ; \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right) .$$

1) (1pt) Montrer que $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) (1pt) Préciser le domaine de définition de chacune.

3) (1pt) Préciser le domaine de dérivabilité de chacune.
(2pt) Calculer leurs dérivées lorsqu'elles sont définies.

4) (1pt) En déduire une relation simple entre $f(x)$ **et** $g(x)$.

Exercice 3 . **source : DS PCSI, France.**

Questions préliminaires :

Soient I **et** J **deux intervalles de** $\mathbb{R}$, **soient** u **et** v **deux fonctions de classe** $\mathcal{C}^1$ **de** J **vers** I, **et** f **une fonction continue de** I **vers** $\mathbb{R}$ **et** $H(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ **, on rappelle que** $H'(x) = f(x),\ \forall x \in I$. **Soit** $F : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ **pour tout** $x \in J$.

a) (1pt) Montrer que $F(x) = H(v(x)) - H(u(x)),\ \forall x \in J$.

b) (1,5pt) En déduire que la fonction F **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** J **et exprimer sa dérivée à l'aide des fonctions** f, u **et** v.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ **et** $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\,\ln t}$.

1. (0.5pt) Montrer que les intégrales ci-dessus ont un sens lorsque x **est un réel strictement positif différent de 1.**

2. (1.5pt) Calculer explicitement $G(x)$ **pour** $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

3. (1.5pt) Montrer que F **est dérivable sur** $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ **et déterminer sa dérivée.**

(0.5pt) Que vaut $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} F'(x)$ **?**

4.a. (1.5pt) Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, **l'encadrement**

$$\frac{x}{2}\left|\frac{x-1}{\ln x}\right| \leq F(x) \leq x\left|\frac{x-1}{\ln x}\right| .$$

b. (1pt) En déduire les limites de la fonction F **en 0 et en** $+\infty$.

c. (1pt) Préciser $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ **et** $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$. **(1.pt) Interpréter graphiquement les résultats.**

5. (1.5pt) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \big(F(x) - G(x)\big) = 0$.

(1.5pt) En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} F(x)$.

On prolonge alors par continuité la fonction F au point 1.

6. (1.5pt) Montrer que la fonction F **est dérivable au point 1.**

7. (1.5pt) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F.

Fin
Bonne chance