بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS1 (08-09): *Dérivées, primitives Fonctions usuelles*

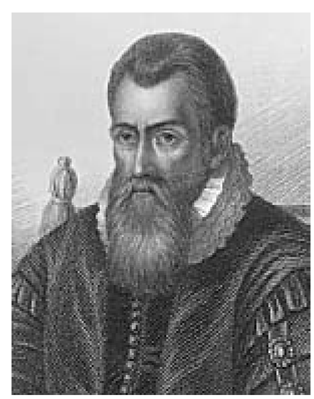
HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Mercredi 29 Octobre 2008

Durée : 3 heures

Blague du jour :
Une exponentielle, un logarithme et une constante se promènent tranquillement dans la rue. Soudain, elles aperçoivent une dérivation sur le trottoir d'en face. L'exponentielle, pourqui les dérivations ne font pas peur propose d'aller voir la cause, mais la constante ne veut pas, elle explique qu'elle a toujours eu peur des dérivations. Le logarithme n'en veut pas non plus, mais sans expliquer pourquoi L'exponentielle se moque un peu d'elle, et traverse le trottoir pour aller voir la dérivation.
- Bonjour, je suis exp(x), dit l'exponentielle
- Bonjour, je suis d/dy, réplique la dérivation, tu n'as pas vu le logarithme ?

Mathématicien du jour : Neper
John Napier (1550-1617), plus connu sous son nom francisé Neper, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. Issu d'une riche famille, lui-même baron, il se fit connaître par sa défense du protestantisme. Les mathématiques n'étaient pas son activité principale mais il ne manquait pas d'idées pour simplifier les calculs. Il inventa surtout les logarithmes. Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques nécessaires en astrologie. Napier utilisa aussi ses talents de mathématicien en théologie. Il prévoyait la fin du monde, qui selon lui se produirait soit en 1688 ou en 1700. En génie électrique, une unité de mesure, le néper, a ainsi été nommée en son honneur.



Présentation et rédaction : 3 points.

Problème I. ***source : DS PCSI, France, 2000.***

On admettra dans ce problème le résultat suivant : toute suite réelle croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

On rappelle la convention $0! = 1$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n\, e^{-x}}{n!}\ .$$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

PARTIE A :

A.1. (1pt) Déterminer le tableau de variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

A.2. (1+1pt) Pour tout entier $n \geq 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et préciser l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes (autre que le point O).

A.3. (1pt) Construire avec soin, sur le même graphique, les courbes C_1, C_2 et C_3 ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

PARTIE B :

Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_n = f_n(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B.1. (1+1pt) En utilisant les résultats du A., montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

B.2. (1pt) En étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$, démontrer l'inégalité

$$\forall t \in [0,1] \qquad \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}\ .$$

En déduire l'inégalité $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{1-\frac{1}{4n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

B.3. (1+1pt) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}$. En déduire, pour tout $n \geq 2$, l'inégalité

$$u_n \leq\ \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\ .$$

B.4. (2+1pt) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\ .$$

En déduire que $u_n \leq\ \mathrm{e}^{-1-\frac{\ln n}{4}}$ pour $n \geq 2$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

PARTIE C : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $a > 0$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(t)\mathrm{d}dt\ .$$

C.1. (1pt) Calculer $I_1(a)$.

C.2. (2pts) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}\ .$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

C.3. (2+1pts) En utilisant les résultats de la question B.1., démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n\ .$$

En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.

C.4. (1pt) En utilisant une intégration par parties, établir, pour $n \geq 2$, une relation entre $I_n(a)$

et $I_{n-1}(a)$.

C.5. (1pt) En déduire, pour tout $n \geq 2$, la relation

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right).$$

C.6. (1pt) Pour $a > 0$ fixé, déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)$.

PROBLÈME II.

source : concours Agro BCPST, 2006.

Dans ce problème, a est un réel strictement positif et f désigne une fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en zéro. La fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une réciproque, notée g.

La fonction g est caractérisée par

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1.1. Dans les deux premières questions, on se propose de montrer que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$:

$$(1) \qquad \int_0^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\ \mathrm{d}y = \alpha f(\alpha).$$

1.1.1. (1pt) Justifier que l'on a $g(0) = 0$.

1.1.2. (1pt) Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

1.2. Pour tout α réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\ \mathrm{d}y - \alpha f(\alpha).$$

1.2.1. (2pts) Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et de g.

1.2.2. (1pt) Déduire du 1.2.1. que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.

1.2.3. (1+1pt) Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0, a]$.

1.2.4. (1pt) Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).

2.1. Dans cette question, on va appliquer la formule précédente au calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\ \mathrm{d}x$.

2.1.1. (1pt) Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = \left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$.
Pour la suite du problème, on admettra l'identité :

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right).$$

2.1.2. (2pt) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\ \mathrm{d}x.$$

Indication : **on utilisera un changement de variable.**

2.1.3. (1pt) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

Indication : **on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$ ainsi que la formule valable pour tout réel x, strictement positif :**

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

2.2.1. (1pt) Montrer que f_0 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

(1pt) Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.

2.2.2. (1pt) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(y^2)\ \mathrm{d}y$ par intégration par parties.

2.2.3. (1pt) En utilisant (1) **et 2.2.2., donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\ \mathrm{d}x$.**

3. Dans cette question, on revient au cas général.
α désigne un réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, et β un réel vérifiant $0 \leq \beta \leq f(a)$.

3.1. (2pts) Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et de $f(\alpha)$ que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\ \mathrm{d}y \geq \alpha\left(\beta - f(\alpha)\right)$$

puis que

$$(2) \qquad \alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\ \mathrm{d}y.$$

3.2. (1pt) Étudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par

$$\forall t \in [0, f(a)], h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y)\ \mathrm{d}y.$$

(2pts) Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2)**.**

Fin
Bonne chance