Banque <<Agro>>
Technologie et Biologie
A - 0604 T

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Dans ce problème a désigne un réel strictement positif et E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $[0, a]$. On rappelle que E, muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Une fonction f de E vérifie la relation $(*)$ si et seulement si :

(*) Il existe un réel A tel que pour tout $x \in [0, a]$, $|f(x)| \leq Ax$.

On note L l'ensemble des fonctions vérifiant la relation $(*)$.

Première Partie.

I.1. Soit f une fonction vérifiant $(*)$; montrer que

I.1.a. $f(0) = 0$

I.1.b. f est continue en 0.

I.2. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de E.

I.3. Soit g une fonction, à valeurs réelles, continue et dérivable sur $[0, a]$, de dérivée bornée sur $[0, a]$ et vérifiant $g(0) = 0$. Montrer que g appartient à L.

I.4. Soit h une fonction, à valeurs réelles, continue et bornée sur $[0, a]$; on note y_0 la solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = h(x)$$

vérifiant $y_0(0) = 0$.

I.4.a. Exprimer pour tout x réel, $x \in [0, a]$, la valeur de $y_0(x)$ sous forme du produit de e^{-x} par une intégrale qu'on précisera.

I.4.b. Montrer que $y_0 \in L$.

T.S.V.P.

I.5.a. Vérifiez que, pour tout x réel distinct de 1 et pour tout n entier naturel, on a :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{k=n} x^k.$$

I.5.b. En déduire, d'une part, que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k \leq \frac{1}{1-x}$$

et, d'autre part, que pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Deuxième Partie.

Soit φ une fonction vérifiant $(*)$ et ne prenant que des valeurs positives ou nulles. On note pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout n entier naturel :

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\varphi(\frac{x}{2^k}).$$

II.1.a. Montrer que, pour tout $x \in [0,a]$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

II.1.b. En déduire que, pour tout $x \in [0,a]$, la suite de terme général $u_n(x)$ converge vers une limite finie, notée $u(x)$.

II.1.c. Montrer que la fonction u définie au II.1.b. appartient à L.

II.2. Soit f une application, à valeurs réelles, définie sur $[0,a]$. On dit que f vérifie la condition $(**)$ si et seulement si :

$$(**) \qquad \text{pour tout } x \text{ appartemant à l'intervalle } [0,a],\ f(x)-f(\frac{x}{2})=\varphi(x).$$

II.2.a. Montrer que u vérifie (**).

II.2.b. Soient f et g deux fonctions vérifiant $(**)$. On note $h=f-g$. Montrer que pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$h(x)=h(\frac{x}{2^n}).$$

II.2.c. Déduire de ce qui précède qu'il existe au plus une fonction continue en 0, vérifiant (**) et prenant en 0 une valeur donnée.

II.2.c. Montrer que si f vérifie (**), alors

$$\forall x \in [0, a], \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(\frac{x}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{k=n} \varphi(\frac{x}{2^k}).$$

II.2.d. Montrer qu'il existe une et une seule fonction de L vérifiant la condition (**).

II.3. Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Notons φ_α la fonction définie sur $[0, a]$ par

$$\varphi_\alpha(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0, \varphi_\alpha(x) = x^\alpha.$$

II.3.a. Montrer que $\varphi_\alpha \in L$ et que φ_α est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

II.3.b. Déterminer l'unique application $f \in L$ vérifiant la condition (**) pour $\varphi = \varphi_\alpha$.

FIN

Banque <<Agro>>
Technologie et Biologie
A - 0804 T

MATHÉMATIQUES 2
Durée : 3 heures
L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Première partie :

Deux tireurs A_1 et A_2 disputent un match selon les règles suivantes :
A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce qu'un des deux la touche.
A_1 tire en premier.

Pour $i \in \{1,2\}$, le tireur A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0,1[$ supposée constante et on note $q_i = 1 - p_i$; les tirs sont indépendants. On numérote les tirs à partir de 1 ; on remarquera que A_1 tire à des rangs impairs.

I.1.a. Montrer que A_1 l'emporte au rang $2n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec une probabilité de $p_1(q_1.q_2)^n$.

I.1.b. Montrer que A_2 l'emporte au rang $2n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec une probabilité de $q_1p_2(q_1.q_2)^n$.

I.1.c. Pour $i \in \{1,2\}$, on note G_i l'évènement " A_i l'emporte ".
Montrer que $P(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty}(q_1.q_2)^n$ et que $P(G_2) = q_1p_2 \sum_{n=0}^{+\infty}(q_1.q_2)^n$.

I.1.d. Montrer que $P(G_1) = \frac{p_1}{1-q_1.q_2}$ et $P(G_2) = \frac{q_1p_2}{1-q_1.q_2}$. Calculer $P(G_1)+P(G_2)$ et en déduire que la probabilité de l'évènement : " Le match dure indéfiniment " est nulle.

I.2.a. On dira que le match est équitable si $P(G_1) = P(G_2)$; montrer que ceci est réalisé si et seulement si $p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$. Que peut-on dire si $p_1 > \frac{1}{2}$?

I.2.b. Etudier la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et représenter sommairement son graphe.

I.2.c. On considère la variable aléatoire T : "Nombre de tirs effectués jusqu'à la fin du match".
Déterminer sa loi de probabilité et montrer que son espérance vaut $E(T) = \frac{2-p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$

I.2.d. Donner l'espérance de T en fonction de p_1 dans le cas où le match est équitable.

T.S.V.P.