—

Première Partie.

I.1
I.1.a. Il suffit d'appliquer (*) pour $x = 0$.
I.1.b. En utilisant le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), dans (*) on conclut que $\lim\limits_{0} f(x) = 0 = f(0)$, d'où f est continue en 0.
I.2. L est non vide car contient la fonction nulle, d'autre part si f, g vérifient (*) et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ vérifie aussi (*), donc L est un $\mathbb{R}$- sous espace vectoriel de E.
I.3. Soit $x \in [0, a]$, en utilisant le Théorème des accroissement finis (TAF) sur l'intervalle $[0, x]$, et comme $g(0) = 0$ on a : $\exists c \in]0, x[$ tel que : $\dfrac{g(x)}{x} = g'(c)$, or g' est bornée sur $[0, a]$, donc $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que : $|g'(t) \leq A \quad \forall t\ [0, a]$, en particulier $|\dfrac{g(x)}{x}| \leq A$, d'où $|g(x)| \leq Ax$, d'où g vérifie (*).
I.4.
I.4.a. Posons $y_0(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{dt}$, donc $y_0'(x) = -y_0(x) + e^{-x}g(x)$ parceque $\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{dt}\right)' = g(x)$.
or $y_0'(x) + y_0(x) = h(x)$, d'où $g(x) = e^x h(x)$, et donc $y_0(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t h(t)\mathrm{dt}$.
I.4.b. On a h est bornée sur $[0, a]$, donc $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que : $|h(t) \leq A \quad \forall t\ [0, a]$, d'où $|y_0(x)| \leq e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t|h(t)|\mathrm{dt} \leq e^{-x}A\int_0^x e^t\mathrm{dt} \leq e^{-x}A\int_0^x e^x\mathrm{dt} = Ax$, car $e^t \leq e^x \quad \forall t \in [0, x]$ et car $\displaystyle\int_0^x e^x\mathrm{dt} = e^x$, puisque e^x ne dépond pas de la variable d'intégration t. Donc y_0 vérifie (*), d'où $y_0 \in L$.
I.5.a. $(1 - x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$
$= 1 + x + x^2 + \ldots x^n - x - x^2 - \ldots - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$, d'où $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
I.5.b. Pour $0 \leq x < 1$ on a $1 - x^{n+1} \leq 1$ et $\dfrac{1}{1 - x} > 0$, d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x}$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$ car $x^{n+1} \to 0$ puisque $0 \leq x < 1$.

Deuxième Partie

II.1.a. On a $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\varphi(\frac{x}{2^k}) - \sum_{k=0}^{n}\varphi(\frac{x}{2^k}) = \varphi(\frac{x}{2^{n+1}}) \geq 0$ car $\varphi \geq 0$, de plus $\varphi \geq 0$ et vérifie (*), donc $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que : $\varphi(t) \leq At \quad \forall t \in [0, a]$, d'où $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varphi(\frac{x}{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} A\frac{x}{2^k} = Ax\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} \leq 2Ax$, en utilisant I.5.b. pour $\frac{1}{2}$.

II.1.b. Parceque toute suite croissante majorée converge vers une limite finie.
II.1.c. D'aprés la question précédente on a : $0 \leq u_n(x) \leq 2Ax$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $0 \leq u(x) \leq A'x$, avec $A' = 2A$, donc u vérifie (*) et par suite $u \in L$.
II.2. On a : $u_n(x) - u_n(\frac{x}{2}) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^k}) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^{k+1}}) = \varphi(x) + \varphi(\frac{x}{2}) + \ldots + \varphi(\frac{x}{2^n}) - \varphi(\frac{x}{2}) - \varphi(\frac{x}{2^2}) - \ldots - \varphi(\frac{x}{2^{n+1}}) = \varphi(x) - \varphi(\frac{x}{2^{n+1}})$.
Au passage à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $u(x) - u(\frac{x}{2}) = \varphi(x) - \lim_{n\to+\infty} \varphi(\frac{x}{2^{n+1}}) = \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x)$ car φ continue en 0 avec $\varphi(0) = 0$, d'aprés I.1.a et I.1.b. puisque φ vérifie (*), d'où u vérifie (**).
II.2.b. f et g vérifient (**), donc $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \varphi(x), g(x) - g(\frac{x}{2}) = \varphi(x)$, en faisant la différence on obtient $h(x) = h(\frac{x}{2}) \quad \forall x \in [0, a]$, en on montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $h(x) = h(\frac{x}{2^n})$.
II.2.c Soient f, g deux fonctions continues vérifiant (**) telles que $f(0) = g(0)$, pour $h = f - g$, on h est continue avec $h(x) = h(\frac{x}{2^n})$, faisons tendre n vers $+\infty$, alors $h(x) = h(0) = 0 \quad \forall x \in [0, a]$, d'où $f = g$ sur $[0, a]$.
II.2.c. f vérifie (**), donc $\forall k \in [|0, n|]$ on a : $f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}}) = \varphi(\frac{x}{2^k})$, on somme ces égalites, en remarquant la somme à gauche est télescopique on obtient $f(x) - f(\frac{x}{2^{n+1}}) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^k})$, d'où $f(x) = f(\frac{x}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^k})$.
II.2.d. Soit $f \in L$ vérifiant (**) d'aprés la partie I, f est continue en 0 avec $f(0) = 0$ et d'aprés la question précédente $f(x) = f(\frac{x}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^k})$, on fait tendre n vers $+\infty$ d'où $f(x) = f(0) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi(\frac{x}{2^k}) = u(x)$, donc une seule fonction vérifie (*) et (**), c'est la fonction u.
II.3.
II.3.a. $|\frac{\varphi_\alpha(x)}{x}| = |x^{\alpha-1}| \leq a^{\alpha-1} = A \quad \forall x \in [0, a]$, donc $|\varphi_\alpha(x)| \leq Ax \quad \forall x \in [0, a]$, d'où φ_α vérifie (*), d'autre part $\varphi_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \geq 0 \quad \forall x \in [0, a]$.
II.3.b. D'aprés II.2.d $f(x) = u(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_\alpha(\frac{x}{2^k}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^\alpha}{2^{k\alpha}} = x^\alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k$ avec $0 < r = \frac{1}{2^\alpha} < 1$, or $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \to \frac{1}{1 - r}$, d'où $f(x) = x^\alpha \frac{1}{1-r} = x^\alpha \frac{1}{1 - \frac{1}{2^\alpha}} = x^\alpha \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}$.

FIN DU CORRIGÉ