DS 4 : *Fonctions réelles* *Arithmétique*

Maths-PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 21 Janvier 2006.
Durée: 3heures 30mn.

CORRIGÉ.

PROBLÉME I :

1) f_p étant la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, elle est aussi strictement croissante sur cet intervalle. Comme elle est continue, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vers son image. De $f_p(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_p(x) = +\infty$, on déduit $f_p(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, ce qui répond à la question.

2) a) Comme l'application réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $g_p = f_p^{-1}$ est aussi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $g_p(0) = 0$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} g_p(y) = +\infty$.

b) La fonction f_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_p'(x) = px^{p-1} + p > 0$ pour $x \geq 0$. Comme f_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec une dérivée ne s'annulant pas, la bijection réciproque g_p est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+$ et, si $y = f_p(x) \in \mathbb{R}_+$ (c'est-'a-dire $x = g_p(y)$), on a

$$g_p'(y) = \left(f_p^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f_p'(x)} = \frac{1}{p(x^{p-1}+1)} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{(g_p(y))^{p-1}+1}$$

c) Cherchons d'abord un équivalent de $f_p(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$: comme $p > 1$, alors le terme px est négligeable devant x^p, donc $f_p(x) \sim x^p$ au voisinage de $+\infty$. Comme $\lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} g_p(y) = +\infty$, par changement de variable, on déduit que $f_p(g_p(y)) \sim g_p(y)^p$ lorsque y tend vers $+\infty$, soit $y \sim g_p(y)^p$. En élevant à la puissance $\dfrac{1}{p}$, *(opération permise avec les équivalents)*, on trouve $\sqrt[p]{y} \sim g_p(y)$ en $+\infty$.

3) a) On a $\varphi_p(x) - x = \dfrac{(p-1)x^p + 1 - px(x^{p-1}+1)}{p(x^{p-1}+1)} = \dfrac{1 - x^p - px}{p(x^{p-1}+1)} = \dfrac{1 - f_p(x)}{f_p'(x)}$

Pour $x \geq 0$, on a donc :

$$\varphi_p(x) - x > 0 \Longleftrightarrow 1 - f_p(x) > 0 \Longleftrightarrow f_p(x) < 1 \Longleftrightarrow f_p(x) < f_p(x_p) \Longleftrightarrow$$

puisque la fonction f_p est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'expression $\varphi_p(x) - x$ est donc strictement positive sur $[0, x_p[$, nulle en x_p

et strictement négative sur $]x_p,+\infty[$. La fonction φ_p admet donc x_p pour unique point fixe sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tout calcul fait, on trouve $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi_p'(x) = \frac{(p-1)x^{p-2}}{p(x^{p-1}+1)^2}(f_p(x)-1).$$

Le signe de $\varphi_p'(x)$ est alors celui de $f_p(x)-1 = f_p(x)-f_p(x_p)$, donc celui de $x-x_p$ puisque f_p est croissante. La fonction φ_p est alors strictement décroissante sur $[0,x_p]$, puis strictement croissante sur $[x_p,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\varphi_p(x) = +\infty$. Elle atteint donc un minimum pour $x = x_p$ qui est le point fixe.

4) a) L'inégalité $x_p < \dfrac{1}{p}$ résulte des variations de la fonction φ_p (elle est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,x_p]$ avec $\varphi_p(0) = \dfrac{1}{p}$ et $\varphi_p(x_p) = x_p$).

b) Pour $x \in \left[x_p, \dfrac{1}{p}\right]$, de $x \leq \dfrac{1}{p}$ on tire $px-1 \leq 0$, donc $x^p+px-1 \leq x^p$ et, de $x \geq x_p$, on tire $f_p(x) \geq f_p(x_p) = 1$, c'est-à-dire $x^p+px-1 \geq 0$. Utilisons maintenant cet encadrement : on a

$$\varphi_p'(x) = \frac{p-1}{p} \times \frac{x^{p-2}(x^p+px-1)}{(x^{p-1}+1)^2}$$

donc, pour $x \in \left[x_p, \dfrac{1}{p}\right]$,

$$\varphi_p'(x) \leq \frac{p-1}{p} \times \frac{x^{2p-2}}{(x^{p-1}+1)^2} = \frac{p-1}{p} \times \frac{x^{2p-2}}{x^{2p-2}+2x^{p-1}1} \leq \frac{p-1}{p}$$

c) La fonction φ_p étant croissante sur $[x_p,+\infty[$, on a $\varphi_p\left(\left[x_p,\dfrac{1}{p}\right]\right) = \left[\varphi_p(x_p), \varphi_p\left(\dfrac{1}{p}\right)\right) \subset \left[x_p, \dfrac{1}{p}\right]$ (cela réesulte par exemple de l'étude du signe de $\varphi_p(x)-x$ faite à la question 3.a), cet intervalle est donc stable par φ_p, ce qui garantit la définition de la suite (u_n) et $u_n \in \left[x_p, \dfrac{1}{p}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De la question 4.b). et des inégalités d'accroissements finis, on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}-x_p| = |\varphi_p(u_n)-\varphi_p(x_p)| \leq \frac{p-1}{p}|u_n-x_p|.$$

d) Par une récurrence immédiate, on obtient $|u_n-x_p| \leq \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^n |u_0-x_p|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $0 \leq \dfrac{p-1}{p} < 1$, cela entraine $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = x_p$. Les réels $u_0 = \dfrac{1}{p}$ et x_p étant tous deux dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{p}\right]$, on a $|u_0-x_p| \leq \dfrac{1}{p}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n-x_p| \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \frac{1}{p}$$

5) a) On a $0 \leq x_p < \dfrac{1}{p}$, d'où (théorème des gendarmes) $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} x_p = 0$.

b) Initialisation pour $p = 2$: il faut montrer $x^3+3x \geq x^2+2x$ pour $x \in [0,1]$, or cette inégalité équivaut à $x(x^2-x+1) \geq 0$, ce qui est vrai pour $x \in [0,1]$, le trinôme x^2-x+1 gardant un signe positif sur $\mathbb{R}$.
Supposons l'inégalité vraie pour un $p \geq 2$ donné, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1] \quad x^{p+1} \geq x^p - x$. En multipliant par x, on a $x^{p+2} \geq x^{p+1}-x^2$, d'où $x^{p+2} \geq x^{p+1}-x$ puisque, pour $x \in [0,1]$, on a $-x^2 \geq -x$ et cela donne $f_{p+2}(x) \geq f_{p+1}(x)$, ce qui achève la récurrence.

c) On a $f_{p+1}(x_{p+1}) = 1 = f_p(x_p) \leq f_{p+1}(x_p)$ (la dernière inégalité résultant de la question précédente). La fonction f_{p+1} étant croissante, on en déduit $x_{p+1} \leq x_p$: la suite $(x_p)_{p\geq 2}$ est donc décroissante.

d) Il faut montrer que $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} \dfrac{x_p^p}{px_p} = 0$. Or, de $0 < x_p < \dfrac{1}{p}$, on tire

$$\frac{x_p^p}{px_p} = \frac{x_p^{p-1}}{p} \leq \frac{1}{p^p} \longrightarrow_{p\longrightarrow+\infty} 0$$

donc $(x_p)^p$ est négligeable devant px_p. On a donc $1 = x_p^p + px_p \sim px_p$, soit $px_p \sim 1$, et donc $x_p \sim \dfrac{1}{p}$.

PROBLÉME II :

1) a) L'étude de la fonction f, montre que f est croissante sur $[0,1]$, donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [e^{-a}, 1] \subset [0,1]$, autrement dit :

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

Ce qui permet de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $0 \leq u_k \leq 1$
D'autre part, $u_0 = 0 \leq e^{-a} = u_1$ et comme f est croissante sur $[0,1]$, alors on montre par récurrence que $u_k \leq u_{k+1}$.

b) La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc convergente.

2) a) On a : $1 - u_{k+1} = f(1) - f(u_k) = f'(c)(1-u_k)$ où $c \in]u_k, 1[$, or $f'(c) = ae^{c-1}$ et $0 \leq c \leq 1$, donc $0 \leq f'(c) \leq a$, d'où le résultat.

b) L'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ se montre facilement par récurrence tenant compte de l'inégalité $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1-u_k)$.
D'autre part $0 < a < 1$, donc $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} a^k = 0$, d'où $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} u_k = 1$

3) a) i. Ca revient à montrer que $0 \leq \dfrac{\ln(a)}{a} \leq 1$, ou bien $0 \leq \ln(a) \leq a$, pour $a \geq 1$. Une étude simple de la fonction $x \mapsto x - \ln x$ sur $[1, +\infty[$ est suffisante.

ii.
$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Longleftrightarrow ae^{a(x-1)} = 1 \\ &\Longleftrightarrow e^{a(x-1)} = \frac{1}{a} \\ &\Longleftrightarrow a(x-1) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \\ &\Longleftrightarrow x = 1 - \frac{\ln(a)}{a} \end{aligned}$$

iii. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, on a $\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow f'(x) = x \Longleftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(a)}{a}$

pour $a = 1$, On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$1 - \frac{\ln(a)}{a} = 1$		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dans ce cas, l'équation $f(x) = x \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$, admet une seule solution qui est $x = 1$.
Pour $a > 1$, On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$1 - \frac{\ln(a)}{a}$		1		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$		$+$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Dans ce cas, l'équation $f(x) = x \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$, admet deux solutions qui sont $x = 1$ et $r(a) \in \left]0, 1 - \dfrac{\ln(a)}{a}\right[$.
Il est clair d'aprés les deux tableaux des variations ci-dessus que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

b) i. $r(a)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$, donc $e^{a(r(a)-1)} = r(a)$, d'où $e^{ar(a)}e^{-a} = r(a)$, ce qui donne $ae^{-a} = ar(a)e^{-ar(a)}$, donc les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction sont égales.

ii. $g'(x) = (1-x)e^{-x} > 0$ sur $]0,1[$, donc g est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, elle réalise alors une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et donc la fonction g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$

iii. D'aprés 3.b.i) on a $g(ar(a)) = g(a) = ae^{-a}$, d'où $ar(a) = g^{-1}(ae^{-a})$ et par suite $r(a) = \dfrac{1}{a}g^{-1}(ae^{-a})$.
On a : $\lim\limits_{a\longrightarrow+\infty} g^{-1}(ae^{-a}) = \lim\limits_{y\longrightarrow 0} g^{-1}(y) = 0$, car $y = ae^{-a} \longrightarrow 0$ quand $a \longrightarrow +\infty$. D'où $\lim\limits_{a\longrightarrow+\infty} r(a) = \lim\limits_{a\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{a}g^{-1}(ae^{-a}) = 0$

c) i. Simple récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le fait que $f(u_k) = u_{k+1}$, $f(r(a)) = r(a)$ et f croissante.

ii. Au passage à la limite, on obtient $0 \leq L(a) \leq r(a)$, d'autre part $f(u_k) = u_{k+1}$, au passage à la limite, on obtient $f(L(a)) = L(a)$, ainsi $L(a)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$, or $r(a)$ est la plus petite solution, donc $r(a) \leq L(a)$, d'où $L(a) = r(a)$.

4) $$L(a) : \begin{array}{rcll}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ a & \longmapsto & 0 & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ & & \dfrac{1}{a}g^{-1}(ae^{-a}) & \text{si } a > 1 \end{array}$$

EXERCICE ARITHMÉTIQUE.

1) a) Supposons $d = a \wedge b$ divise c, donc $c = kd$, avec $k \in \mathbb{N}$ et on sait d'aprés le théorème de Bezout, que $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d = au + bv$, d'où $c = kd = ax + by$ où $x = ku, y = kv$.
Inversement, supposons $c = ax + by$, on sait que $a = k_1 d, b = k_2 d$, avec $k_1 \wedge k_2 = 1$, d'où $c = (k_1 x + k_2 y)d$, d'où $d = a \wedge b$ divise c.

b) Avec les notations de la question précédente, on obtient le système suivant : $\begin{cases} c = (k_1 x + k_2 y)d \\ c = (k_1 x_0 + k_2 y_0)d \end{cases}$, en faisant la différence on obtient : $k_1(x - x_0) = k_2(y_0 - y)$, d'où k_1 divise $k_2(y_0 - y)$, or $k_1 \wedge k_2 = 1$, d'où k_1 divise $y_0 - y$, donc $y_0 - y = \alpha k_1$, et par suite $x - x_0 = \alpha k_2$, d'où $\begin{cases} x = x_0 + \alpha k_1 \\ y = y_0 - \alpha k_2 \end{cases}$, avec $k_1 = \dfrac{a}{d}, k_2 = \dfrac{b}{d}$

c) i. En maple ça donne :

```
> isolve(2520*x-3960*y=6480);
```
$$\{x = 12 + 11\_Z1, y = 6 + 7\_Z1\}$$

ii. En maple ça donne :

```
> isolve(95*x+71*y=46);
```
$$\{x = 67 + 71\_Z1, y = -89 - 95\_Z1\}$$

iii. En maple ça donne :

```
> isolve(20*x-53*y=3);
```
$$\{x = 24 + 53\_Z1, y = 9 + 20\_Z1\}$$

2) a) D'aprés le théorème de Bezout $\exists (u,v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $nu + mv = 1$, donc $\begin{cases} nu \equiv 1 & [m] \\ mv \equiv 1 & [n] \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_0 = amv + bnu \equiv bnu \equiv b & [m] \\ x_0 = amv + bnu \equiv amv \equiv a & [n] \end{cases}$
Donc $x_0 = amv + bnu$ est une solution particulière du sytème (S)

c) Soit x une autre solution du sytème (S), alors : $\begin{cases} x_0 = x & [m] \\ x_0 = x & [n] \end{cases}$, donc n divise $x - x_0$ et m divise $x - x_0$, or $n \wedge m = 1$, d'où nm divise $x - x_0$ et par suite x est congrue avec x_0 modulo nm.

d) En maple ça donne :

```
> a:=2:b:=-3:n:=140:m:=99:
> igcdex(n,m,'u','v');
                        1
> u;
                        29
> v;
                        -41
> x_0:=a*m*v+b*n*u;
                 x_0 := -20298
```

La solution générale est de la forme : $x = x_0 + kmn$.

e) Du 1ér partage, on peut conclure que $N \equiv 3 \quad [17]$, du 2ème partage, on peut conclure que $N \equiv 4 \quad [11]$, du 3ème partage, on peut conclure que $N \equiv 5 \quad [6]$
La fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates est la solution minimale du système $\begin{cases} x \equiv 3 & [17] \\ x \equiv 4 & [11] \\ x \equiv 5 & [6] \end{cases}$
Réponse : 785

$\boxed{\text{Fin.}}$